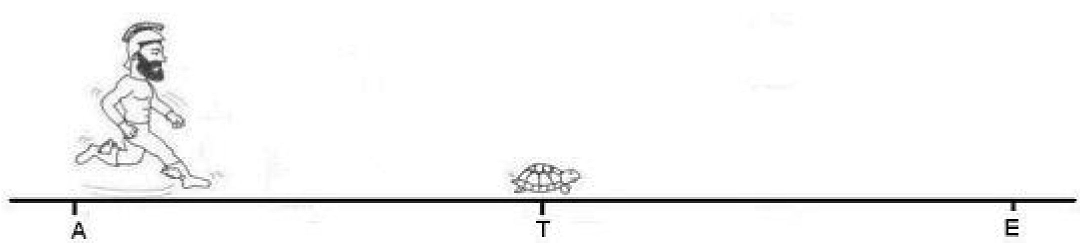
UNIDAD 2: CONJUNTOS NUMERABLES Y NO NUMERABLES

Se pueden contar los elementos de un conjunto finito y decir cuántos hay. Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ tiene tres elementos y $B = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ primo} \wedge p \leq 20\}$ tiene 8 elementos. De hecho, si se nos preguntase qué se entiende por conjunto *finito*, probablemente responderíamos que es aquel cuyos elementos pueden ser contados. Sin embargo, no es en principio fácil decir cuántos elementos tienen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$; todos ellos son conjuntos *infinitos*, pues no podemos *contar* sus elementos, y en un primer análisis un tanto ingenuo parece que las inclusiones estrictas $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, indican que $\mathbb{N}$ es el más *pequeño* y $\mathbb{R}$ el más *grande*. Sin embargo, veremos que aunque, en efecto, $\mathbb{R}$ es más grande que $\mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen, esencialmente, el *mismo número* de elementos.

Comentarios históricos

El actual tratamiento de los conjuntos infinitos es obra del matemático alemán *George Cantor* (1845-1918), quien a fines del siglo pasado logró sistematizar las ideas desordenadas que giraban en torno a este tema desde varios siglos antes y avanzar en el análisis de resultados insospechados hasta entonces.
La preocupación por definir el *infinito* es muy antigua, mateniéndose a lo largo del tiempo la noción de *lo mucho*, *lo que no puede ser contado* como su equivalente natural. Antiguamente se entendía como una especie de tope, más allá del cual no podía haber nada. Lo que fue variando de una civilización a otra es la ubicación de ese tope. A medida que la posibilidad de contar progresaba, el *infinito* se corría.
Varios siglos después, *Arquímedes* calculó que el número de granos de arena en un globo del tamaño de la *esfera celestial* sería del orden de 10^{52}. Ese fue su infinito.
Así fueron encontrados números cada vez mayores, hasta que se comprendió que no puede haber límite al pensamiento humano. No importa cuán numerosa sea una colección, siempre se puede imaginar una mayor, agregando un ente a la anterior.
Los griegos no pudieron definir el infinito pero comprendieron su esencia: *un conjunto infinito es el que no tiene topes, que no se cierra, que no termina nunca.* Ellos, por ejemplo, sabían que el conjunto de puntos de cualquier segmento de recta es infinito. Este avance en la comprensión de la idea les acarreó nuevas inquietudes. Es célebre la *paradoja de Zenón* según la cual Aquiles nunca podría alcanzar a una tortuga. El razonamiento de *Zenón* era el siguiente:

Supongo que Aquiles arranca corriendo desde A y la tortuga en ese mismo instante sale de T y luego de un tiempo Aquiles alcanza a la tortuga en E. A cada posición de Aquiles entre A y E le corresponde una única posición de la tortuga entre T y E y, recíprocamente. Luego, el segmento $\overline{AE}$ tiene tantos puntos como el $\overline{TE}$ contenido estrictamente en $\overline{AE}$. Siendo esto imposible surge que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga



Es posible que ni siquiera Zenón creyera tal conclusión que significaba negar el movimiento. Más lógica es pensar que disfrutaba volando con su intelecto creando estas paradojas que no lograban desentrañar ni él ni sus contemporáneos. En el siglo XVII *Galileo* acepta que el segmento $\overline{AE}$ tiene tantos puntos como el segmento $\overline{TE}$, siendo $\overline{TE}$ una parte de $\overline{AE}$, pero no logra explicarlo adecuadamente.
A principios del siglo XIX el respetado matemático *C. F. Gauss* decía: *Protesto contra el uso de magnitudes infinitas como si fuera algo terminado; este uso no es admisible en Matemática. El infinito es sólo una forma de hablar...* Esta actitud que podríamos llamar *horror infinity*, fue habitual en los matemáticos hasta casi fines de siglo. La *Matemática* debía ocuparse solamente de magnitudes finitas y números finitos mientras que el tratamieto del actual infinito debía dejarse a la *Filosofía*.
Cantor, pese a la indiscutible autoridad de *Gauss* se dedicó al tema, poniendo de manifiesto una gran intuición creativa y mucha energía para perseverar dado que muchos de sus contemporáneos discutían fuertemente su trabajo. Por ejemplo, *Kronecker* se rehusó a publicarlo, argumentando que el mismo era oscuro y falso, *traído*

al mundo cien años antes de tiempo. Poco a poco fueron aceptándose sus teorías y actualmente hay consenso en aceptar la legitimidad de las mismas.
Mostraremos, entonces, cómo pueden definirse y estudiarse las magnitudes infinitamente grandes siguiendo sus ideas. Descubriremos a lo largo del tratamiento que en este tema se evidencia fuertemente una de las principales características de la *Matemática*: en ella, más que en cualquier otra ciencia, reina la libre creación. No es un accidente que en el nacimiento de la *Teoría de conjuntos* (1883) se acuñara la expresión:

La verdadera esencia de la Matemática es su libertad.

CARDINALIDAD

Definición

Se dice que los conjuntos A y B tienen igual **potencia**, que son **equipotentes** o que son conjuntos **coordinables**, si existe una biyección entre ellos, lo que se expresa poniendo $A \cong B$.
La relación $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva; por ello, los conjuntos se clasifican respecto de su potencia en clases disjuntas. Dado un conjunto A, a él y a cualquiera de los conjuntos equipotentes con él se le asignará un objeto matemático llamado **cardinal** de A, $|A|$.
Dos conjuntos son equipotentes si y sólo si tienen el mismo cardinal, esto es, $|A| = |B|$ equivale a poner $A \cong B$.

Observación

La relación de equipotencia, $\cong$, es efectivamente:

- *reflexiva*, pues para todo conjunto A es $A \cong A$ ya que la función identidad es una biyección de A en A.
- *simétrica*, ya que si $f : A \longrightarrow B$ es una biyección, entonces también lo es $f^{-1} : B \longrightarrow A$; es decir, $A \cong B \Rightarrow B \cong A$.
- *transitiva* (Ejercicio).

La equipotencia entre conjuntos satisface, pues, a las tres leyes de las relaciones de equivalencia.

Definición

A partir del conjunto vacío, construyamos los conjuntos:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...$$

donde los elementos de cada conjunto son los del conjunto anterior y, además, el propio conjunto anterior. Los cardinales de estos conjuntos se representan por los símbolos 0, 1, 2, 3, ..., respectivamente, y son los **números naturales**; el conjunto de todos ellos se denota por $\mathbb{N}$.
A los conjuntos que tienen por cardinal a un número natural se les llama **conjuntos finitos**.

Observaciones

- Si A es un conjunto finito, a su cardinal se le conoce también como el **número de elementos** de A; dos conjuntos finitos son, pues, equipotentes si y sólo si tienen el mismo número de elementos.

  El **principio del palomar**, también llamado **principio de Dirichlet**, establece que si n palomas se distribuyen en m palomares, y si $n > m$, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.
- Si A es un conjunto finito y B está estrictamente incluido en A, entonces no existe ninguna biyección entre A y B; esto es, un conjunto finito no es equipotente a ninguna de sus partes propias (sin demostración).
- Según lo anterior, si un conjunto A se puede poner en correspondencia biyectiva con alguna de sus partes propias, entonces A no puede ser finito; en tal caso, se dirá que A es **infinito**.

Ejemplos

1. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es infinito pues podemos establecer una biyección entre $\mathbb{N}$ y el conjunto $P = \{2n/n \in \mathbb{N}\}$ de los números pares, que está contenido estrictamente en $\mathbb{N}$; una tal biyección es, por ejemplo:

   $$f : \mathbb{N} \longrightarrow P, n \mapsto f(n) = 2n$$

   (Ejercicio)
2. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es infinito pues se puede poner en correspondencia con el intervalo $(-1, 1)$, por ejemplo, que está estrictamente incluido en $\mathbb{R}$, ya que la función

$$f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

es una biyección.

También $\mathbb{R}$ es equipotente con $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R}/a > 0\}$ vía $f(x) = e^x$ (Ejercicio).

Definición

Se llaman **conjuntos infinitos** a los conjuntos que no son finitos; es decir, un conjunto A es infinito si $|A|$ no es un número natural.

Caracterizaciones de los conjuntos infinitos:

Un conjunto A es infinito si y sólo si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones:

- Algún subconjunto de A es equipotente con $\mathbb{N}$.
- El conjunto A es equipotente con alguna de sus partes propias.

(Sin demostración)

Los anteriores ejemplos ponen de manifiesto que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos. Los cardinales de estos conjuntos son, de entre los no finitos, los de mayor interés.

Definición

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es infinito; a su cardinal se le denota por $\aleph_0$ *(alef cero)*. Se dice que A es un **conjunto infinito numerable** si es equipotente con $\mathbb{N}$, es decir, si $|A| = \aleph_0$. Los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ son infinitos numerables.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es infinito, pero $\mathbb{R}$ no es infinito numerable. Se dice que $\mathbb{R}$ y todos los conjuntos equipotentes con $\mathbb{R}$ tienen la **potencia del continuo**; el cardinal de $\mathbb{R}$ se denota por $\aleph_1$ *(alef uno)* -o por una c gótica-.
El conjunto $\mathbb{C}$ tiene la potencia del continuo.

"Sketch" de prueba:

- El conjunto $\mathbb{Z}$, de los números enteros, es infinito numerable, ya que la siguiente función es una biyección:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

(Ejercicio: completar la prueba)

- El conjunto $\mathbb{Q}$, de los números racionales, es numerable, pues se puede probar que $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q}/q > 0\}$ puede distribuirse como:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{array}$$

(Ejercicio: completar la prueba)

- Al escribir $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ implicamos que $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$. Este hecho lo demostró *G. Cantor,* creador de la *Teoría de Conjuntos* y de la *Teoría de los Cardinales.*

  Para ello basta demostrar que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable, ya que éste es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$.

  En efecto, supongamos que todos los números reales del intervalo dado, pueden colocarse en una tabla de infinitos decimales,

primer número	$0, a_1a_2a_3...$
segundo número	$0, b_1b_2b_3...$
tercer número	$0, c_1c_2c_3...$
...	...

La parte principal de la demostración consiste en construir mediante un *proceso diagonal* un nuevo número perteneciente al intervalo que no esté incluido en la tabla. Para hacer esto, basta escoger el primer decimal a de este número de manera que difiera de a_1 y que no sea ni 0 ni 9 (para evitar ambigüedades que resultarían de igualdades como 0,999...=1,000...), elegir b diferente a b_2 y que no sea ni 0 ni 9, elegir c de manera similar y continuar así. De esta forma construiremos el número $x = 0, abcd...$ que difiere de cada uno de los números de la tabla anterior: del primero en el primer decimal, del segundo en el segundo decimal, y en general del número que ocupe el lugar n en el $n - \acute{e}simo$ decimal. Esto prueba que la tabla anterior no contiene todos los números del intervalo $(0, 1)$ y, por tanto, éste no es numerable.

- El conjunto $\mathbb{C}$, de los números complejos, tiene la potencia del continuo. Esta afirmación equivale a esta otra: *el intervalo real* $(0, 1)$ *es equipotente al producto cartesiano* $(0, 1) \times (0, 1)$*, ya que* $\mathbb{R}$ *es equipotente a* $(0, 1)$*,* $\mathbb{C}$ *es equipotente a* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, y este conjunto los es, pues, a* $(0, 1) \times (0, 1)$.

  Todo se reduce a encontrar una función como:

$$f : (0, 1) \times (0, 1) \longrightarrow (0, 1), (x, y) \mapsto f(x, y) = 0, a_1b_1a_2b_2... \text{ donde } \begin{cases} x = 0, a_1a_2... \\ y = 0, b_1b_2... \end{cases}$$

  que es biyectiva.

  (Ejercicio: completar la prueba)

Observación

De acuerdo con lo dicho anteriormente, si A es un conjunto infinito numerable, entonces existe alguna biyección

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A, n \mapsto f(n)$$

Llamando $a_n = f(n)$, el conjunto A se puede escribir como:

$$A = \{a_n/n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

Recíprocamente, todo conjunto de la forma $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ (con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$) es infinito numerable ya que $f : \mathbb{N} \longrightarrow A, n \mapsto f(n) = a_n$ es una biyección.
Podemos resumir lo anterior diciendo que un conjunto A es *infinito numerable* si y sólo si es posible numerar sus elementos recurriendo a los números naturales o, también, si y sólo si, los elementos de A pueden ponerse en forma de **sucesión indefinida** $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se pondrá $|A| \leq |B|$ si A es equipotente con una parte de B.
Los conjuntos finitos tienen menor cardinal que el de $\mathbb{N}$ y la potencia del continuo es superior a la potencia de lo numerable, es decir $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, o sea $\aleph_1 > \aleph_0$.

Observaciones

- Dados dos conjuntos A y B, la relación $|A| \leq |B|$ significa que existe una aplicación inyectiva de A en B. Si $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B| \Rightarrow |A| < |B|$. Esto ocurrirá pues hay una aplicación inyectiva de A en B y ninguna biyectiva.

- No existe ningún conjunto infinito con potencia inferior a la de $\mathbb{N}$, ya que todo conjunto infinito incluye a un conjunto infinito numerable.

- No se conoce ningún conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$. Se ha probado que la proposición *"existe un conjunto* A *tal que* $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$*"* es *indecidible* (ni se puede demostrar, ni se puede refutar). Se llama **hipótesis del continuo** al axioma que establece que no existe ningún cardinal estrictamente comprendido entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

- Dado un cardinal cualquiera, siempre existe otro cardinal mayor que él, como prueba el **Teorema de Cantor**, que asegura que *para cualquier conjunto* A, $|A| < |\mathcal{P}(\mathcal{A})|$, donde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es el conjunto de partes o conjunto potencia de A.

- El **Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein** establece un criterio para establecer si existe una función biyectiva entre dos conjuntos cualesquiera A y B:

  Para cualesquiera conjuntos A y B, si existe una función inyectiva de A en B y existe una función inyectiva de B en A, entonces existe una correspondencia biunívoca entre B y A.

  El teorema puede parecer trivial para conjuntos finitos, pero el enunciado del teorema se cumple para conjuntos de *cualquier cardinalidad.* El teorema resulta útil en muchos casos para poder determinar si un conjunto tiene la misma cardinalidad que otro conjunto, ya que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, justo cuando existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Definición

Para los *números transfinitos* (*cardinales*) se pueden extender sin ambigüedad, la suma, la multiplicación y la potenciación.
Sean por ejemplo, dos conjuntos *disjuntos* A y B, tales que $|A| = a$ y $|B| = b$, la **suma** y la **multiplicación**, pueden construirse a partir del cardinal de la *unión* y del *producto cartesiano* de estos dos conjuntos:

$$a + b = |A \cup B|$$
$$a \cdot b = |A \times B| \text{ donde } A \times B = \{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

Aunque la suma y la multiplicación no presentan problemas, la *resta* y la *división* no están definidas.
La **potenciación** requiere construir un conjunto más complicado, pero resulta igualmente bien definida:

$$a^b = \left|A^B\right| \text{ donde } A^B = \{f/f : B \longrightarrow A\}$$

FIN

PRÁCTICA 2: Conjuntos numerables y no numerables

1. Probar que $A = \{1, 2, 3\}$ no es equipotente a $B = \{4\}$.
2. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:
   (a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\right\}$
   (b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\right\}$
   (c) $C = \left\{\left(m^4 + 5\right)^n / m, n \in \mathbb{N}\right\}$
   (d) $D = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2, 6\}$
3. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, mostrar que $|A \times B| = |B \times A|$.
4. Probar que $[0, 1]$ es equipotente a $[a, b]$.
5. Probar que $(0, 1] \cong [0, 1)$.
6. Mostrar que si $A \cong \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$. Por convención, diremos $|\emptyset| = 0$.
7. Probar que $\aleph_0 \leq \aleph_1$. Más aún, como $\mathbb{N} \cong \mathbb{R} \Rightarrow \aleph_0 < \aleph_1$.