Dirección General de Cultura y Educación
Dirección de Educación Superior
INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACION DOCENTE Y TÉCNICA Nro. 127
"CIUDAD DEL ACUERDO"
Red Federal Formación Docente Continua Nro. a1 - 000127
Plaza 23 de noviembre. 2900 - San Nicolás (Buenos Aires)
Tel. 03461 - 425348 / 424137 - fax 03461 422140

PROFESORADO DE MATEMÁTICA

CURSO: 3º año

Apunte para los alumnos del curso:

"Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden"

Parte I

PROFESORAS: Graciela Bojanich
Micaela Susana Luque

Año: 2007

Índice.

Objetivos

Intentamos que este apunte constituya una herramienta-guía para los alumnos y deberá ser complementada con la bibliografía indicada en el proyecto anual de la asignatura.

I.- Introducción:

I-1.- Surgimiento

Las ecuaciones diferenciales surgen en forma espontánea cuando se quieren resolver problemas físicos, geométricos, astronómicos, químicos, etc. También en ciencias biológicas, económicas y sociales. Permiten formular planteos matemáticos que primero idealizan y luego clarifican los problemas que se desean resolver.

Ejemplo

✓ *Escribir la ecuación de la curva C tal que en cada punto P(x,y) $\in$ C la pendiente sea igual al doble de la suma de las coordenadas de dicho punto.*

Sea $y = f(x)$ la función que tiene como gráfica a la curva C. Luego $y' = f(x)$ representa la pendiente de la curva C en el punto P(x,y).

Por lo tanto la condición exigida es $y' = 2(x + y)$. Con este elemental planteo hemos formulado una ecuación diferencial

Desde este simple ejemplo hasta cuestiones de importante complejidad, se aplican las ecuaciones diferenciales en diferentes áreas.

I-2.- Reseña histórica

Las primeras y más sencillas ecuaciones diferenciales fueron resueltas en el siglo XVII por Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli en problemas de Geometría y Mecánica. Estos primeros descubrimientos hicieron creer que las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales originadas en problemas geométricos y físicos podrían expresarse por medio de las funciones elementales del Cálculo. Por ello gran parte de los primeros esfuerzos fueron orientados al desarrollo de técnicas ingeniosas para resolver ecuaciones diferenciales por medio de recursos sencillos aplicados, tan sólo un número finito de veces, a las funciones ordinarias del Cálculo.

Durante el siglo XVIII, fueron desarrollados procedimientos más sistemáticos, principalmente por Euler, Lagrange y Laplace.

En 1820, Cauchy obtuvo el primer "teorema de existencia" para las ecuaciones diferenciales, pero en 1841, José Liouville, demostró que tal condición no siempre era posible con medios elementales.

I-3.- Definición genérica de ecuación diferencial

Genéricamente, se llama <u>ecuación diferencial</u> a una ecuación que vincula un conjunto de variables independientes, un conjunto de funciones en dichas variables independientes y un conjunto de derivadas (ordinarias o parciales) de estas funciones.

Más precisamente, una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen derivadas totales o parciales de una función desconocida y:

i) si aparece una sola variable independiente, las derivadas son derivadas ordinarias y la ecuación se denomina *ecuación diferencial ordinaria*.

ii) si aparecen dos o más variables independientes, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación se llama *ecuación en derivadas parciales*.

Luego, en los casos particulares, si *la función desconocida* es:

- *i)* una función escalar

  (o función real de variable real, $\begin{array}{l} f: \quad A \quad \to \quad R \quad / \quad A \subseteq R \\ x \in A \to y = f(x) \in R \end{array}$),

  la ecuación diferencial será __ordinaria__ y las derivadas que intervienen son ordinarias;

- *ii)* un campo escalar

  (o función real de variable vectorial o de varias variables

  $$\begin{array}{l} f: \quad A \quad \to \quad R \quad / \quad A \subseteq R^n \\ \bar{r} \in A \to y = f(\bar{r}) \in R \end{array}$$),

  la ecuación diferencial será __en derivadas parciales__ y las derivadas que intervienen son parciales.

<u>NOTA:</u> Se da por supuesta la existencia de las derivadas, es decir, no se hace referencia a las condiciones que refieren a la existencia de las mismas.

I-4.- Definición de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

(Se la presenta sólo a modo de introducción a futuros estudios del lector)

Una ecuación en la que figura como incógnita una función $u = u(x_1, x_2, ..., x_r)$ de dos o más variables y que establece un vínculo entre las variables $x_1, x_2, ..., x_r$; la función u y las derivadas parciales primeras $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, segundas $\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$, ..., enésimas $\frac{\partial u^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_r^{k_r}}$ (con $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$), de dicha función se llama <u>ecuación diferencial en derivadas parciales</u> de orden n.

Ejemplo:

✓ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, donde $z = z(x, y)$.

Por lo tanto, las ecuaciones entre derivadas parciales, son aquellas que contienen una o más derivadas parciales, por lo que la función incógnita tiene que tener, al menos, dos variables independientes.

II.-Ecuaciones diferenciales ordinarias.

II-1.-Definición de ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Se utiliza la palabra ordinaria para hacer referencia a las ecuaciones donde *sólo aparecen derivadas ordinarias* y no derivadas parciales.

Una expresión de la forma $f(z, w, w') = 0$ donde $z \in C$ se llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Hallar una solución de esta ecuación, es encontrar una función $\varphi(z)$ compleja de variable compleja ($D\varphi \subseteq C$), tal que $f(z, \varphi(z), \varphi'(z)) = 0$ (Se da por supuesta la existencia de la $\varphi'(z)$ por estar involucrados contenidos aún no estudiados por los estudiantes del curso).

En tanto que, si se considera una $f(x, u, u') = 0$ donde $x \in R$, hallar la solución de la ecuación diferencial, será hallar una función $\rho(x)$ compleja de variable real, definida y derivable en un intervalo real I tal que satisfaga $f(x, \rho(x), \rho'(x)) = 0$.

Ejemplo

✓ $\omega'(t) = \alpha\omega(t)$ para $t \in R$; $\omega(t)$ y $\alpha \in C$ [luego, $\omega(t) = x(t) + i\, y(t)$; $\alpha = a + bi$]

Las soluciones tienen la forma $\omega(t) = k\ e^{\alpha t}$, donde $\alpha \varepsilon C$, $k \varepsilon C$

NOTA: Luego de esta definición, para una presentación más genérica de las ecuaciones ordinarias, en el presente trabajo, y salvo expresa indicación de lo contrario, nos ocuparemos exclusivamente de ecuaciones diferenciales con una función incógnita real de variable/s real/es.

II-2.-Definición de ecuación diferencial ordinaria de orden superior

Una expresión de la forma $H\left(x, f(x), f'(x),..., f^{n}(x)\right) = 0$, que relaciona una variable independiente real $x \in I$ con los valores $f(x)$ de una función real incógnita y de sus n primeras derivadas, se llama ecuación diferencial ordinaria de orden *n*.

Luego H es una función definida en un dominio del espacio de $n+2$ dimensiones, en las variables $x, f(x), f'(x),..., f^{n}(x)$.

Si se considera $y = f(x)$, la expresión de la ecuación diferencial ordinaria de orden será $H\left(x, y, y',..., y^{n}\right) = 0$

Ejemplo

- ✓ $y'' + 7y' + 12y = 0$ donde $y = y(x)$

  Las soluciones tienen la forma $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$, $\forall x \varepsilon R$, $C_1, C_2 \varepsilon R$

II-3.- Orden de una ecuación diferencial

Ecuación diferencial ordinaria de orden n es toda ecuación en la que interviene una derivada de orden n y ninguna derivada de orden superior a n.

Orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de derivación que aparece en la misma.

Ejemplos:

- ✓ $xy''+7xy = senx$, es una ecuación diferencial de 2º orden.
- ✓ $y^{IV} + \frac{1}{x^2+1} - xy = 0$, es una ecuación diferencial de 4º orden.

II-4.- Grado de una ecuación diferencial.

Grado de una ecuación diferencial es el mayor exponente con que aparece la derivada que da el orden. El grado existe si la ecuación diferencial puede anotarse como polinomio respecto de las derivadas.

Ejemplos:

- ✓ $(y'')^4 - y'x + y^5 = \cos x$, es una ecuación diferencial de 4º grado
- ✓ $y'' = \frac{y}{(x+2y)^2} \Leftrightarrow y''(x+2y'')^2 = y \Leftrightarrow y''x^2 + 4x(y'')^2 + 4(y'')^3 = y$, es una ecuación diferencial de 3º grado
- ✓ $y'' = \sqrt[3]{1+(y')^4} \Leftrightarrow (y'')^3 = 1+(y')^4$, es una ecuación diferencial de 3º grado.
- ✓ $3^{y'''} - 2y'+4 = 0$, no tiene grado

II-5.- Resolución de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, significa hallar todas las funciones explícitas $y = f(x)$ o implícitas $H(x, y) = 0$, que la satisfacen, llamadas <u>soluciones</u>, o también <u>integrales</u>.

Igualmente, una función escalar f es solución de la ecuación diferencial ordinaria de orden superior $H(x, y, y', ..., y^n) = 0$ en el intervalo $A \Leftrightarrow \forall x \in A : H(x, f(x), f'(x), ..., f^n(x)) = 0$.

La solución puede hallarse a veces en forma **explícita o normal**, pero en otras ocasiones se la obtiene en forma **implícita**.

Puede llegarse a la solución mediante una o más integrales que eliminan la o las derivadas.

Cada vez que se integra aparece una constante o parámetro C.

Se llama <u>solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden *n*</u> a una función f tal que sus valores y los de sus derivadas satisfacen la ecuación diferencial y en cuya expresión aparecen *n* constantes arbitrarias independientes (o parámetros). La cantidad de constantes puede reducirse mediante condiciones iniciales o también a través de condiciones frontera.

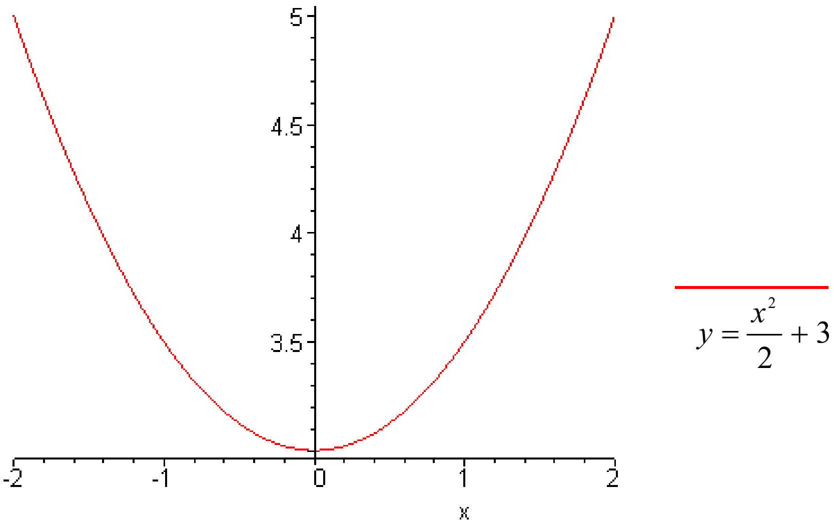
En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para cada valor de la constante C existe una **solución particular** de la ecuación (gráficamente una curva plana).

Existe otro tipo de solución, llamada **solución singular**, que no es ni general ni particular. La solución de una ecuación diferencial, que no está contenida en la expresión que define a la solución general se llama **solución singular**.

Ejemplos:

✓ $y' = x$

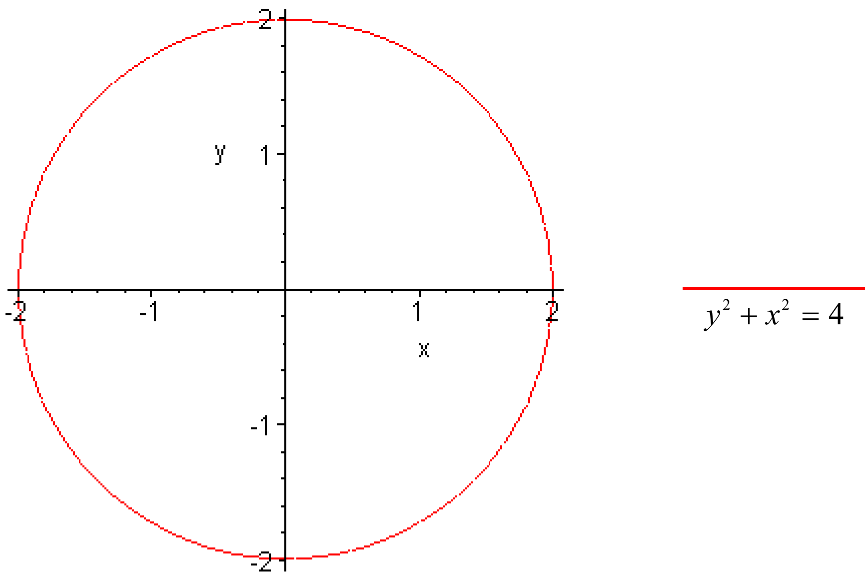
$$\frac{dy}{dx} = x$$
$$dy = xdx$$
$$\int dy = \int xdx$$
$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad (\forall C \in R)$$ Solución general en forma explícita que representa a una familia de parábolas
$$y = \frac{x^2}{2} + 3 \quad \text{(Solución particular)}$$



$$y' + 2y = x$$

✓ $yy' + x = 0$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$
$$ydy = -xdx$$
$$\int ydy = \int -xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1$$
$$y^2 + x^2 = 2C_1$$
$$y^2 + x^2 = C \quad \text{(Solución general en forma implícita)}$$
$$y^2 + x^2 = 4 \quad \text{(Solución particular)}$$



II-6.- Nota aclaratoria

Este apunte, como se ha dicho anteriormente, sólo pretende dar una introducción sencilla al tema de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El lector interesado puede recurrir a una gran variedad de libros que se refieren exclusivamente al tema.

Nos limitaremos, entonces, a ecuaciones diferenciales, que pueden resolverse utilizando funciones escalares elementales y cuya solución se obtiene mediante los métodos conocidos de integración.

II-7.- Existencia y unicidad de soluciones

II-7.a.- Reflexiones previas

La existencia de soluciones para las ecuaciones diferenciales no será objeto de tratamiento en este apunte. Sólo y para que el lector pueda valorizar la importancia de este ítem presentaremos algunos ejemplos.

Planteada la ecuación diferencial, el primer objetivo es encontrar una expresión matemática que determine perfectamente todas las soluciones de ella. Ello es factible en un importante número de ecuaciones pero también existen ecuaciones donde no se puede asegurar la existencia de las soluciones y otras donde, pese a existir la solución, no se encuentra una expresión clara de la misma.

Ejemplo:

✓ La ecuación $y'' + y' + seny = 0$ donde $y = y(x), x\varepsilon R$; admite soluciones $\forall x \in R$, pero no pueden expresarse con una función conocida del cálculo.

Asimismo y una vez encontrada una relación matemática que permita hallar las soluciones de la ecuación diferencial, también cabe preguntarse si puede haber otras soluciones además de las contenidas en esa expresión o, si todas las formas de la misma serán solución de la ecuación planteada.

Ejemplo:

✓ La ecuación $y' = y$, donde $y = y(x), x\varepsilon R$; tiene *todas* las soluciones contenidas en la expresión $y = Ce^x, \forall x\varepsilon R \wedge C\varepsilon R$.

✓ La ecuación $y' = xy^2$ donde $y = y(x), x\varepsilon R$; contiene en la expresión $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}, x\varepsilon R \wedge C\varepsilon R$ a todas las soluciones de la ecuación, *excepto* la $y = 0$.

Luego, para una ecuación diferencial de primer orden, cuando se puede encontrar una familia de curvas, que dependen de un parámetro; no se puede afirmar que necesariamente cubrirán todas las soluciones de la ecuación.

La afirmación anterior también lleva a cuestionarse si toda familia de curvas planas que dependen de un parámetro permite hallar una ecuación diferencial de la cual esta familia de curvas es solución. Así se llega al siguiente punto.

II-7.b.- Existencia de una ecuación diferencial que admita como soluciones una familia de curvas.

Dada una familia de curvas, el problema ahora es hallar, una ecuación diferencial que la admita como solución.

Ejemplos:

✓ $y = cx^2$

Esta expresión representa al haz de parábolas con vértice en el origen y con eje de simetría el eje de las ordenadas (familia de curvas de ecuación $f(x, y, c) = 0$)

Derivando tanta veces como constantes haya, (en este caso es sólo la *c*) se obtiene:

$y' = 2cx$

Es necesario eliminar la constante, pues si no, $y = cx^2$ sólo es solución de $y' = 2cx$ para el mismo c.

De $y = cx^2$, es $c = \dfrac{y}{x^2}$ si $x \neq 0$. $(x = 0 \Rightarrow y = 0)$

Reemplazando en $y' = 2cx$, queda $y'x - 2y = 0$ $\forall c$ (expresión que contiene a la solución y=0)

✓ $y = c_1 x^2 + c_2 x$

Representa a la familia de parábolas (o de curvas con dos parámetros, del tipo $f(x, y, c_1, c_2) = 0$. Se obtendrá entonces una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden).

Derivando dos veces:

$y' = 2c_1 x + c_2 \Rightarrow y'' = 2c_1$

Eliminando las constantes:

$$c_1 = \frac{y''}{2} \wedge c_2 = y' - 2c_1 x \Rightarrow c_2 = y' - y'' x$$

Reemplazando c_1 y c_2 en la ecuación del haz:

$$y = \frac{y''}{2}x^2 + (y' - y''x)x \Rightarrow y = \frac{y''}{2}x^2 + y'x - y''x^2 \Rightarrow 2y = x^2 y'' + 2xy' - 2x^2 y'' \Rightarrow x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Se obtiene una ecuación diferencial del tipo $H(x, y, y', y'') = 0$ que tiene a tal familia como solución general.

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de una familia de curvas con n parámetros, la ecuación diferencial correspondiente es del tipo $H(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$. O sea, es de orden n y se la obtiene eliminando las n constantes después de n derivaciones sucesivas.

Con los ejemplos presentados se intenta mostrar que: dada para una familia de curvas planas derivables con continuidad de orden n, en general, es posible encontrar una ecuación diferencial de orden n que admita a dicha familia como soluciones de la ecuación.

II-7.c.- Existencia de soluciones para ecuaciones ordinarias de primer orden

Obviamente, si $y' = f(x)$, para f continua en un intervalo I, sabemos que la función $\varphi_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x_0 \in I \;\wedge\; x_0$ cierto punto fijo; es una solución de $y' = f(x)$. Más aún, $\varphi(x) = \varphi_0(x) + C$ (donde C es una constante arbitraria) son soluciones de $y' = f(x) \quad \forall x \in I$.

Pero el problema de hallar todas las integrales o soluciones de una ecuación diferencial es muchas veces una propuesta inalcanzable. Por eso, adquiere especial relevancia el estudio para encontrar sólo aquellas soluciones que cumplen con ciertas condiciones prefijadas

Por ejemplo, la ecuación $y' = y^2 \quad \forall x \in R$; donde $f(x,y) = y^2$, admite como familia de soluciones a $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$. Esta expresión nos da las soluciones de la ecuación excepto para $x = 0$, pese a que $0 \in D_y$.

Por ello, un teorema general de existencia para las ecuaciones del tipo $y' = f(x,y)$, donde f es continua, sólo podrá ocuparse de la existencia de una solución en cierto intervalo cercano al punto inicial.

Sólo a manera de comentario, y en referencia a las ecuaciones de primer orden se presenta el siguiente teorema de existencia:

Sea $y' = f(x,y)$, con condiciones iniciales (x_0, y_0), f función de variables reales, definida y continua en el intervalo $I: \left(|x - x_0| \le a \wedge |y - y_0| \le b, siendo : a \wedge b > 0 \right)$. donde también $|f(x,y)| \le M, \forall (x,y) \in I$, y además f cumple la condición de Lipschitz en *I*; entonces en $|x - x_0| \le a$ existe una solución única a la ecuación diferencial con la condición de valor inicial planteada.

[*Condición de Lipschitz*: Sea f definida $\forall (x,y) \in S$. Se dice que f cumple una condición de Lipschitz en *S,* si existe una constante *K>0* tal que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2|$, $\forall (x,y_1),(x,y_2) \in S$]

<u>OBSERVACIONES</u>:

En determinadas ocasiones, interesa hallar todas las soluciones de una ecuación; en otras, en cambio, sólo aquellas que satisfacen ciertas condiciones, (es decir, elegir una curva particular). Las soluciones particulares surgen de imposiciones adicionales, llamadas *condiciones iniciales, de frontera o de contorno.*

Condición inicial en una ecuación ordinaria es una condición que debe cumplir la solución en un punto; determinando entonces, una solución particular de la ecuación. Por ejemplo: Resolver la ecuación $y' = ky$ tal que $y(0) = 2$.

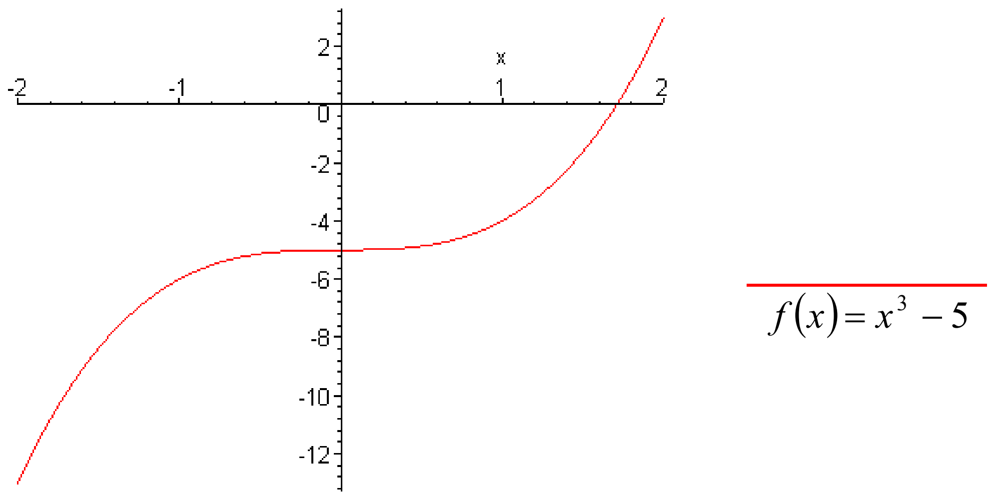
Ejemplo 1:

✓ Para $y' = 3x^2$ hallar la solución cuya curva pase por el punto $(2{,}3)$:

$$y' = 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$dy = 3x^2 dx$$
$$\int dy = \int 3x^2 dx$$
$$y = x^3 + c \qquad (c \in R \quad \text{familia de curvas cúbicas})$$

Luego, $y = x^3 + c \wedge x = 2 \wedge y = 3 \Rightarrow 3 = 8 + c \Rightarrow c = -5$

La función asociada a $f(x) = x^3 - 5$ es la solución requerida (siendo $y = f(x)$).



Si la ecuación diferencial es de 2º orden, para hallar una solución particular a partir de la general, debemos determinar dos constantes arbitrarias y necesitamos, entonces dos condiciones iniciales.

Ejemplo 2:

✓ Dada $y''=2x^3$, obtener la solución a la cual pertenece el punto $(0,2)$ y tal que la curva tenga pendiente 3 en ese punto:

$$y'=\frac{x^4}{2}+C_1 \qquad \text{(integrando una vez)}$$

$$y=\frac{x^5}{10}+C_1x+C_2 \qquad \text{(integrando otra vez)}$$

Condiciones del problema:

$$y=f(x)$$
$$(0,2)\in f$$
$$f'(0)=3$$

Considerando:

$$f(x)=\frac{x^5}{10}+C_1x+C_2 \Rightarrow f'(x)=\frac{x^4}{2}+C_1$$

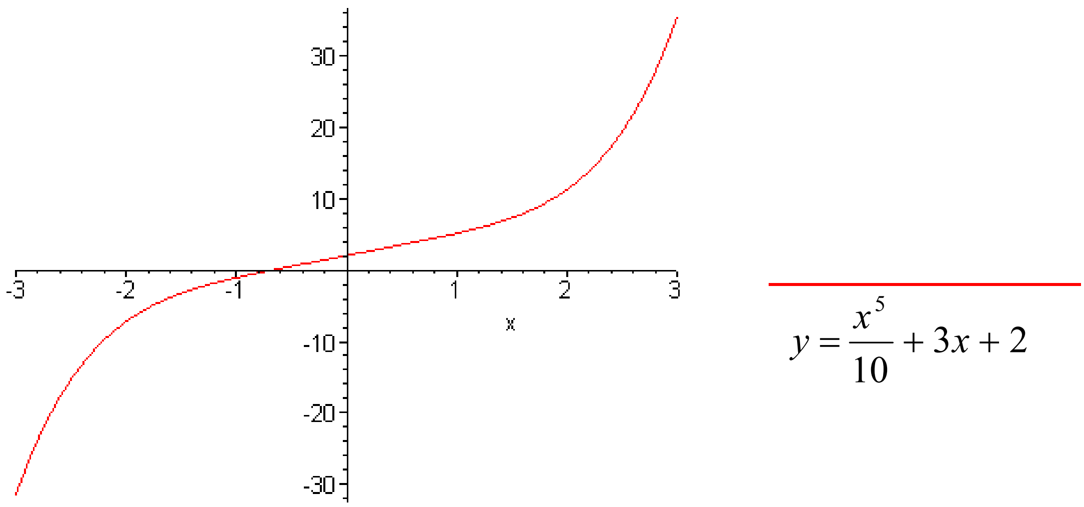
Reemplazando estas expresiones por:

$$x=0$$
$$f(0)=2$$
$$f'(0)=3$$

obtenemos:

$$2=\frac{0^5}{10}+C_1 0+C_2 \wedge 3=\frac{0^4}{2}+C_1$$

Luego $C_1=3 \wedge C_2=2$ y la solución particular buscada es $y=\frac{x^5}{10}+3x+2$



II-7.d.- Unicidad de las soluciones

Se presenta un ejemplo para motivar al lector:

Ejemplo:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3dx \text{ para y} \neq 0$$

$$\mathrm{y}^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$$y = (x + C)^3$$

Nótese que como también la función nula $(y = 0)$, es solución de la ecuación diferencial, pero no se obtiene a partir de la expresión general, debe agregarse al conjunto solución.

Además si se considera la condición inicial $y(0) = 0$, se encuentra que $\rho(x) = x^3$ es también una solución al problema con condiciones iniciales planteado (Más aún, se pueden encontrar infinitas soluciones al problema dado). Luego el estudio de la unicidad, en las soluciones de un problema con condiciones iniciales, requiere un detenido análisis de las hipótesis del problema, para poder asegurar que se cumple dicha propiedad.

III.- Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de forma normal

Los siguientes son algunos métodos, para ecuaciones diferenciales de primer orden de forma normal (o que pueden alcanzar una expresión de ese tipo, mediante algún cambio de variable conveniente). Son mecanismos que permiten alcanzar la resolución de la ecuación diferencial a través de cuadraturas (es decir, por medio de integrales indefinidas).

En todos los métodos desarrollados en el presente apunte, se dará por supuesto el cumplimiento de las condiciones de existencia en D_f *.*

III.1.- Ecuaciones a variables separables.

III-1.a.- Conceptos previos

Sea $y' = f(x,y)$, donde f es una función continua dada, tal que puede descomponerse en producto de dos factores uno dependiente exclusivamente de "x" y el otro de "y", se dice que es una ecuación diferencial de variables separables.

> Recordar: $y' = f(x,y) = m(x)\cdot q(y)$ *; m definida y continua en un intervalo real I, q definida y continua en un intervalo real J.*
>
> *Entonces la ecuación a variables separables admite solución en* $I \times J$ *.*
>
> (Nótese que: se garantiza la existencia y no se hace referencia a condiciones iniciales.)

Ejemplos:

- ✓ $y' = 2x$
- ✓ $y' = xy$
- ✓ $y' = \dfrac{tg(x)}{y}$

son tres ecuaciones diferenciales de variables separables.

Pero en el caso de las ecuaciones:

- ✓ $y' = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 y - y^3}$
- ✓ $y' = sen(xy)$

la separación de las variables es imposible.

III-1.b.- Desarrollo del método

Las ecuaciones diferenciales de variables separables, deben poder expresarse de la forma:

$$y' = m(x)\cdot q(y)$$

donde m y q son funciones escalares continuas.

Entonces, como $y' = \dfrac{dy}{dx}$, tenemos: $\dfrac{dy}{dx} = m(x)\cdot q(y)$

- Si $q(y) \neq 0$ podemos separar las variables:

$$\frac{dy}{q(y)} = m(x)dx$$

Entonces para $q(y) \neq 0$, y como q y m son continuas, está asegurada la existencia de las siguientes integrales

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int m(x)dx$$

y así, integrando, obtenemos la solución general, de la forma:

$$p(y) = s(x) + C$$

siendo p una primitiva de $\dfrac{1}{q(y)}$, y $s(x)$ una primitiva de la función m.

- Si $q(y) = 0 \Rightarrow y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$

Ejemplo:

✓ $\dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x+2} = 0$ De esta expresión surge $y \neq 0 \wedge x \neq -2$

$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x+2} = 0$ Trabajando algebraicamente

$y' = y \cdot \frac{1}{x+2}$ $(*)$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+2}$

$\ln|y| = \ln|x+2| + H,\ donde\ \ H \in R$

$\ln|y| - \ln|x+2| + \ln k = 0 \ \ (k \rangle 0)$

$\ln\left|\frac{ky}{x+2}\right| = 0$

$\left|\frac{ky}{x+2}\right| = 1$

$k|y| = |x+2|$

$y = C(x+2),\ \ donde\ \ C \in R - \{0\} \wedge x \neq -2 \wedge y \neq 0$

<u>OBSERVACIÓN</u>: Si se hubiera planteado la ecuación $(*)$ que admite $y = 0$ como solución, dicha integral ($y = 0$) se alcanzaría para $C = 0$. Luego todas las soluciones también estarían contempladas en la expresión $y = C(x+2)$ con $C \in R$.

III-1.c.- Ecuaciones reducibles a variables separables

Sea la ecuación $y' = f(ax+by)$, con f continua, a y b constantes no nulas.

En principio esta ecuación no es a variables separables, pero con un conveniente cambio de variables $(u = ax+by)$ se puede aplicar el método mencionado.

En efecto, $u = ax+by \Rightarrow y = \frac{u-ax}{b} \Rightarrow y' = \frac{u'-a}{b}$.

Reemplazando en $y' = f(ax+by)$

Se obtiene $\frac{u' - a}{b} = f(u)$, es decir: $u' = a + bf(u)$ que es una ecuación a variables separables.

Ejemplo:

✓ $y' = (x + y)^2$ $\qquad a = b = 1$

Considerando $u = x + y \Rightarrow u' = 1 + y'$

Reemplazando en la ecuación se llega a $u' - 1 = u^2 \Rightarrow u' = 1 + u^2$

Luego $\frac{du}{dx} = 1 + u^2$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx \qquad 1 + u^2 \neq 0 \ \forall u$$

$$arc \ tg \ u = x + C$$
$$u = tg(x + C)$$

Reemplazando a $u = x + y$

$$x + y = tg(x + C)$$
$$y = tg(x + C) - x$$

$C \in R$, soluciones de la ecuación planteada

III.2.- Ecuaciones homogéneas

III-2.a.- Conceptos previos

Una función f es homogénea de $\underline{\text{grado}\,\alpha} \Leftrightarrow \forall t \varepsilon R,\ t \neq 0 \ es \ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$

Entonces, f es homogénea de $\underline{\text{grado cero}} \Leftrightarrow \forall t \in R,\ t \neq 0 \ es \ f(tx, ty) = f(x, y)$

__Propiedad:__

Sea $f(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$; $P(x, y) \neq 0$, P y Q funciones homogéneas.

Entonces f función homogénea de grado cero $\Leftrightarrow$ $Q(x,y)$ $\wedge P(x,y)$ dos funciones homogéneas de igual grado.

Demostración:

$\Rightarrow)$ P y Q funciones homogéneas

$f(x,y)$ homogénea de grado cero $\Rightarrow f(x,y)=f(tx,ty)$

$f(x,y)=\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}=f(tx,ty)=\dfrac{Q(tx,ty)}{P(tx,ty)}\Rightarrow\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}=\dfrac{Q(tx,ty)}{P(tx,ty)}\Rightarrow$ (P y Q homogén.)

$$\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}-\frac{t^{\alpha}Q(x,y)}{t^{\beta}P(x,y)}=0\Rightarrow t^{\beta}Q(x,y)-t^{\alpha}Q(x,y)=0\Rightarrow\left(t^{\beta}-t^{\alpha}\right)Q(x,y)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$

- $t^{\alpha}-t^{\beta}=0$ (para $Q(x,y)\neq 0$) $\Rightarrow$ $\alpha=\beta$ pues $t\neq 0$. Entonces P y Q funciones homogéneas de igual grado para $Q(x,y)\neq 0$

ó

- $Q(x,y)=0$. Además Q homogénea de cierto grado $\alpha\in R\Rightarrow$

  $\Rightarrow Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y)$ para dicho $\alpha\in R$

  Por esta igualdad y pues uno de los factores es nulo, [$Q(x,y)=0$] $\Rightarrow Q(tx,ty)=0$ $\forall\alpha\varepsilon R$

  $\therefore\ Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y)\ \forall\ \alpha\in R$ [ambos miembros de la igualdad son nulos]

  Entonces si Q verifica la condición de homogeneidad $\alpha\in R$, en particular la cumplirá para aquél $\beta\in R$ para el que *P* resulta homogénea. Luego *Q y P* homogéneas de igual grado.

$\Leftarrow)$ $f(x,y)=\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, $P(x,y)\neq 0$, $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ homogéneas y de igual grado

$$Sea\ t \neq 0\ \ entonces \quad f(tx,ty) = \frac{Q(tx,ty)}{P(tx,ty)} = \frac{t^{\alpha} Q(x,y)}{t^{\alpha} P(x,y)} = t^{0} \cdot f(x,y)$$

Luego, f es homogénea de grado cero.

Ejemplos:

✓ $y' = \dfrac{y+x}{y-x} = f(x,y)$

$$f(tx,ty) = \frac{ty+tx}{ty-tx} = \frac{t(y+x)}{t(y-x)} = f(x,y)$$

f *homogénea grado cero en* D_f

✓ $2xydy - (x^2 + 3y^2)dx = 0$

$$2xydy = (x^2 + 3y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

$$y' = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} = f(x,y)$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 + 3t^2y^2}{2txty} = \frac{t^2(x^2 + 3y^2)}{2t^2xy} = f(x,y)$$

f *homogénea grado cero en* D_f

III-2.b.- Desarrollo del método

Sea $y' = f(x,y)$, donde f es una función continua dada y homogénea de grado cero.

<u>Recordar:</u>

Es conveniente efectuar un cambio de variables $\left(u = \dfrac{y}{x}\right)$ que nos llevará a una ecuación con variables separables.

El cambio de variables a proponer surge espontáneamente si se observa que toda función homogénea de grado cero puede expresarse como función del cociente $\frac{y}{x}$ ó $\frac{x}{y}$.

En efecto, si f es homogénea de grado cero, se verifica que: $\forall t: f(tx, ty) = f(x, y)$.

Haciendo $t = \frac{1}{x}$, resulta $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Ésto sugiere el cambio de variables $\frac{y}{x} = u$ (si $x \neq 0$), con $u = u(x)$.

Así, la ecuación propuesta $y' = f(x, y)$, puede anotarse $y' = f(1, u)$, o bien, $y' = h(u)$.

Luego como $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

Reemplazando en $y' = h(u)$ queda $u'x + u = h(u)$, ecuación que puede resolverse separando variables:

$$u'x + u = h(u)$$
$$\frac{du}{dx}x + u = h(u)$$
$$\frac{du}{dx}x = h(u) - u$$
$$\frac{du}{h(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad si \;\; x \neq 0 \wedge h(u) - u \neq 0$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{h(u) - u} = \ln|x| + \ln k, \quad k > 0$$
$$\ln(k|x|) = \int \frac{du}{h(u) - u}$$

Luego,

$$k|x| = e^{\int \frac{du}{h(u)-u}}$$

Como $u = u(x)$, corresponde a una solución de esta última ecuación para cada k, entonces $y = x \cdot u(x)$ proporciona una solución de la ecuación de partida para cada valor de la constante.

<u>Nótese</u> que al efectuar divisiones, generalmente perdemos soluciones adicionales que deberemos considerar separadamente.

Ejemplo:

✓ $(x^2 + y^2)dx - xy \cdot dy = 0$

$$(x^2 + y^2)dx - xy \cdot dy = 0$$

$$(x^2 + y^2)\frac{dx}{dx} - xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 + y^2) - xyy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x,y) \quad x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad (para_l\ lle\,\mathrm{var}\,la\ a\ la\ forma\ normal)$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{txty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2xy} = t^0 \cdot f(x,y)$$

ecuación homogénea de grado cero

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

Reemplazando en

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x,y); \quad \mathrm{x} \neq 0 \wedge \mathrm{y} \neq 0$$

$$u'x + u = \frac{x^2 + u^2x^2}{x^2u} \quad donde\ u \neq 0 \quad pues\ y \neq 0$$

$$u'x + u = \frac{x^2\left(1+u^2\right)}{x^2 u}$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{u} - u$$

$$u'x = \frac{1+u^2-u^2}{u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1}{u} \quad \textit{ecuación a variable separable}$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln k \qquad k > 0$$

$$u^2 = 2\ln|x| + 2\ln k$$

$$u^2 = \ln x^2 + \ln C \qquad \left(C = k^2 \Rightarrow C > 0\right)$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln\left(Cx^2\right)$$

$$y^2 = x^2 \ln\left(Cx^2\right)$$

$$|y| = \left[x^2 \ln\left(Cx^2\right)\right]^{1/2}$$

$$y = \pm \left[x^2 \ln\left(Cx^2\right)\right]^{1/2} \qquad C > 0,\ x = 0 \notin D_f$$

III-2.c.- Ecuaciones reducibles a homogéneas

La ecuación diferencial:

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

no es homogénea de grado cero para $c_1 \neq 0 \vee c_2 \neq 0$, [es decir, $c_1^2 + c_2^2 > 0$], pero puede transformarse en una ecuación de este tipo mediante un cambio de variables conveniente y si se cumple la condición.

Notas:

- Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow$ (suponiendo $a_2 \wedge b_2$ no nulos) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k \Rightarrow$

$a_1 = ka_2 \wedge \ b_1 = kb_2 \Rightarrow y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\dfrac{k\chi + c_1}{\chi + c_2}\right)$ que es una ecuación como las planteadas en el punto *III-1.c*

- Si $c_1^2 + c_2^2 = 0$, [es decir, $c_1 = c_2 = 0$] $\Rightarrow y'(x) = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$ es una ecuación homogénea de grado cero.

Entonces para $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, con $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \wedge$ $\wedge\ c_1^2 + c_2^2 > 0$; es necesario realizar el siguiente cambio de variables:

$$x = X + x_0 \wedge \ y = Y + y_0,$$

donde (x_0, y_0) es la solución única del sistema de ecuaciones lineales y $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = -c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = -c_2 \end{cases}$$

La solución única existe, pues su determinante: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ por la hipótesis planteada y además es no nula pues $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

Luego, si $x = X + x_0 \wedge \ y = Y + y_0 \Rightarrow dx = dX \wedge \ dy = dY$

Entonces, la ecuación diferencial dada se transforma en:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2X + b_2Y + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right)$$

Como $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \wedge a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

y como $dx = dX \wedge dy = dY$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)}{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0)}\right)$$

Resumiendo, este tipo de ecuaciones diferenciales $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ se pueden convertir en homogéneas siempre que las rectas $r_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $r_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se corten en un punto, al que notamos (x_0, y_0).

Nótese que al plantear $X = x - x_0 \wedge Y = y - y_0$ se realiza una traslación, donde $x = X + x_0 \wedge y = Y + y_0$.

Al efectuar la traslación, el punto (x_0, y_0) referido al sistema de ejes cartesianos xy, se transforma en el origen de un nuevo sistema de ejes XY paralelos a los anteriores. En el nuevo sistema de coordenadas cartesianas XY, las constantes $c_1 \wedge c_2$ de las rectas, se anulan y se llega a: $y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y_1}{a_2X + b_2Y_2}\right)$ que resulta homogénea.

Ejemplo:

✓ $(4x + 3y + 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$

$$(4x + 3y + 1)\frac{dx}{dx} + (3x + 2y + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x + 2y + 1)y' = -(4x + 3y + 1)$$

$$y' = \frac{-4x - 3y - 1}{3x + 2y + 1}$$

$$\begin{cases} -4x-3y=1 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-1,1)$$

$$\text{Luego,} \quad \left| \begin{array}{l} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X = x+1 \\ Y = y-1 \end{array} \right.$$

$$(\text{Nota : se verifica que } (-4)\cdot 2 - 3\cdot(-3) = 1 \neq 0 \wedge (-1)^2 + 1^2 > 0)$$

$$y' = \frac{-4(X-1)-3(Y+1)-1}{3(X-1)+2(Y+1)+1} = \frac{-4X-3Y}{3X+2Y} \rightarrow \text{homogénea de grado cero}$$

$$y' = \frac{-4X-3Y}{3X+2Y}; \quad u = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = uX \Rightarrow Y' = u'X + u$$

$$u'X + u = \frac{-4X-3uX}{3X+2uX}$$

$$u'X = \frac{-4-3u}{3+2u} - u$$

$$\frac{du}{dX}X = \frac{-2u^2-6u-4}{3+2u}$$

$$\frac{-3-2u}{2u^2+6u+4}du = \frac{dX}{X}$$

$$u^2+3u+2 = C\cdot\frac{1}{X^2} \quad \left(C = \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\frac{Y^2}{X^2} + 3\frac{Y}{X} + 2 = C\cdot\frac{1}{X^2} \qquad C > 0$$

$$Y^2+3XY+2X^2 = C$$

$$(y-1)^2 + 3(x+1)(y-1) + 2(x+1)^2 = C \qquad C > 0$$

Luego

$$y^2+3xy+2x^2+y+x = C \quad (\text{solución general}) \text{ para } C > 0$$

Además $y=-x$, $\quad y=-2x-1$ soluciones singulares de la ecuación.

III.3.- Ecuación diferencial lineal de 1º orden.

III-3.a.- Definiciones

Se llama ecuación diferencial lineal de 1º orden a una ecuación del tipo: $y' + p(x)y = r(x)$ donde p y r son funciones escalares conocidas y continuas en un intervalo I.

- Si $r(x)=0 \quad \forall x \in I$, la ecuación lineal suele llamarse **incompleta** (o <u>lineal homogénea</u>) y puede resolverse separando variables.

En efecto,

$$y'+p(x)y=0 \Rightarrow y'=-p(x)y \Rightarrow \frac{1}{y}y'=-p(x) \quad \text{para } y\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -p(x)dx \Rightarrow \ln|y|+\ln k=-\int p(x)dx \quad k>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(k|y|)=-\int p(x)dx \quad \text{donde } y\neq 0 \wedge k>0 \Rightarrow k|y|=e^{-\int p(x)dx} \text{ donde } y\neq 0 \wedge k>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{e^{-\int p(x)dx}}{k}=\pm\frac{1}{k}e^{-\int p(x)dx} \quad k>0 \Rightarrow \quad y=Ce^{-\int p(x)dx} \quad C\neq 0$$

La función $y=0$ también es solución de la ecuación y está contenida en la expresión general para $C=0$.

- Si $r(x)\neq 0$, la ecuación se llama **ecuación lineal completa** (o no homogénea) y puede resolverse mediante diversos métodos.

III-3.b$_1$.- Método de Bernoulli para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de 1º orden

El método de Bernoulli, propone un cambio de variables.

Dada la ecuación diferencial $y'+p(x)y=r(x)$, plantea la siguiente sustitución: $y(x)=u(x).v(x)$ => $y'=u'v+uv'$.

Reemplazando en $y'+p(x)y=r(x)$, se obtiene:

$$u'v+uv'+p(x)uv=r(x) \Rightarrow u'v+u[v'+p(x)v]=r(x) \quad \textbf{(*)}$$

Para conocer la v=v(x), se impone que el resultado del corchete del 1º miembro es nulo, es decir, $v'+p(x)v=0$. Luego queda planteada una ecuación diferencial lineal homogénea, de la que se sólo se busca una solución particular cualquiera:

$$v' + p(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx, \text{ seleccionando C = 0 pues interesa sólo un valor particular}$$

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

Al reemplazar $v = v(x)$ en **(*)**, y como $v' + p(x)v = 0$, obtenemos:

$$u' e^{-\int p(x)dx} = r(x)$$

$$u' = r(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Luego, $$u = \int r(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Finalmente, la solución general está dada por:

$$y = uv = \left[\int r(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\therefore\ y = e^{-\int p(x)dx} \int r(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Ejemplo:

✓ $y' + 2y = x$

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + 2uv = x$$

$$u'v + u(v' + 2v) = x$$

Solución particular de $v' + 2v = 0$:

$$v' + 2v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx$$

$$\ln|v| = -2x$$

$$v = e^{-2x}$$

Entonces

$u'e^{-2x} = x$

$\int du = \int xe^{2x}$ (integración por partes)

$u = \dfrac{e^{2x}x}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + C$

Luego, $y = \left(\dfrac{e^{2x}x}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + C \right) \cdot e^{-2x}$

$\therefore\ y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + Ce^{-2x}$ (Solución general)

III-3.b$_2$.- Método del factor integrante para la resolución de la ecuación diferencial lineal de 1º orden completa

El siguiente método puede aplicarse para resolver algunas ecuaciones diferenciales. Consiste en multiplicar los dos miembros de la ecuación diferencial por un factor, no nulo, que haga posible la integración.

Para $y' + p(x)y = r(x)$ cuya resolución se desarrolló en el punto anterior, mediante un cambio de variables, el factor integrante es $l(x) = e^{\int p(x)dx}$, que surge de una elección arbitraria de la primitiva que aparece en el exponente.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación, queda:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = r(x)e^{\int p(x)dx} \quad \textbf{(*)}$$

Ahora bien, el 1º miembro es la derivada, respecto de x, de $ye^{\int p(x)dx}$.

En efecto, $\dfrac{d\left(ye^{\int p(x)dx} \right)}{dx} = y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}$.

Reemplazando en **(*)** se obtiene:

$$\frac{d\left(ye^{\int p(x)dx} \right)}{dx} = r(x)e^{\int p(x)dx}$$

La solución se obtiene integrando ambos miembros respecto de x:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int r(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Finalmente, $y = e^{-\int p(x)dx}\int r(x)e^{\int p(x)dx} + Ce^{-\int p(x)dx}$, que es la misma expresión obtenida anteriormente mediante sustictución de variables.

Ejemplo:

✓ $y' - 2y = e^{3x}$

Como $p(x) = -2$, un factor integrante es $l(x) = e^{-2x}$.

Multiplicando por e^{-2x} a los dos miembros de la ecuación propuesta:

$$e^{-2x}(y' - 2y) = e^{-2x}e^{3x} \Rightarrow e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = e^x \Rightarrow \frac{d(ye^{-2x})}{dx} = e^x \Rightarrow \int\frac{d(ye^{-2x})}{dx} = \int e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ye^{-2x} = e^x + C \Rightarrow y = (e^x + C)e^{2x} \Rightarrow y = e^{3x} + Ce^{2x}$$

Si bien el cambio de variables es un poco más extenso, en general, resulta más fácil que memorizar el factor integrar.

III-3.c.- Ecuación diferencial ordinaria de primer orden reducible a lineal: Ecuación de Bernoulli

Una ecuación fácilmente reducible a lineal es la siguiente:

$y' - p(x)y = y^n r(x)$ donde *p(x)* y *r(x)* funciones continuas; *n* una constante real donde $n \neq 0 \wedge n \neq 1$ (si $n = 0$ o $n = 1$ se llega a los casos ya vistos).

Esta ecuación se conoce como **ecuación de Bernoulli** en honor al matemático Jacques Bernoulli (1654-1705), miembro de una célebre familia de matemáticos suizos, a quien se le atribuye haber usado por primera vez la palabra *"integral"* en matemática.

Como el exponente de y en el segundo miembro no es ni 0 ni 1, la ecuación no es lineal.

Entonces, suponiendo (para los casos en que $n > 0$, pues si $n < 0$ esta restricción ya está impuesta en la definición de la ecuación dada) que $y \neq 0$, se divide ambos miembros de la ecuación diferencial por y^n, y se obtiene: $y^{-n} y' + y^{1-n} p(x) = r(x)$.

Efectuando el cambio de variable $z = y^{1-n}$, resulta: $z' = (1-n) y^{-n} y'$ o bien $y' = z' y^n \dfrac{1}{1-n}$.

Reemplazando en $y^{-n} y' + y^{1-n} p(x) = r(x)$, obtenemos la ecuación lineal:

$$y^{-n} z' y^n \frac{1}{1-n} + z \cdot p(x) = r(x)$$

$$\frac{1}{1-n} z' + z \cdot p(x) = r(x) \quad \text{con incógnita } z = z(x)$$

que puede resolverse como se ha indicado.

Al hallar z, la solución de la ecuación inicial, está dada por $z = y^{1-n}$.

Nótese que si $n > 0$ resulta que $y = 0$ también es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo:

✓ $y' + \dfrac{1}{x} y = x^3 y^4$

Dividiendo por y^4, queda

$y^{-4} y' + \dfrac{1}{x} y^{-3} = x^3$

Si hacemos $z = y^{-3}$ es $z' = -3 y^{-4} y'$, o bien $y' = -\dfrac{1}{3} y^4 z'$.

Reemplazando en la ecuación $y^{-4} y' + \dfrac{1}{x} y^{-3} = x^3$:

$$y^{-4}\left(-\frac{1}{3}\right)y^4 z' + \frac{1}{x}z = x^3$$

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{1}{x}z = x^3$$

(multiplicando miembro a miembro por (-3))

$$z' - \frac{3}{x}z = -3x^3 \quad \text{(ecuación diferencial lineal en } z \text{ y } z'\text{)}$$

Para resolverla, hacemos $z = uv$, y obtenemos:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = -3x^3$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = -3x^3$$

La ecuación incompleta para resolver es:

$$v' - \frac{3}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{3}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln|v| = 3\ln|x| \Rightarrow v = x^3$$

Luego, $u'x^3 = -3x^3 \wedge x \neq 0 \Rightarrow u' = -3 \Rightarrow \int du = -3\int dx \Rightarrow u = -3x + C$

$$\therefore z = (-3x + C)x^3 \Rightarrow z = -3x^4 + Cx^3$$

Finalmente, $y^{-3} = -3x^4 + Cx^3$, o bien $y = \left(-3x^4 + Cx^3\right)^{1/3}$, que resuelve la ecuación dada y como n>0 se debe agregar la solución $y = 0$.

III.4.- Ecuación diferencial exacta

III-4.a.- Ecuación diferencial total exacta
(Definición y cálculo de la solución)

La ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es total exacta, si el primer miembro es una expresión **diferencial total exacta**, o sea, si existe una función potencial $\varphi(x,y) \, / \quad \varphi_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P \quad \wedge \quad \varphi_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$.

En ese caso, la ecuación dada toma la forma $d\varphi = 0$ y admite como solución general la que surge de $\varphi(x,y) = k$.

Recordar que la **condición necesaria y suficiente** para que la expresión dada sea diferencial total exacta es la de simetría: $P_y = Q_x \ \left(P_y = \frac{\partial P}{\partial y} \wedge Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$, para P y Q derivables con continuidad en una región del plano (abierto y simplemente conexo).

En ese caso, para resolver la ecuación diferencial se determina una función potencial.

Para hallar la solución general, basta igualar la función potencial a una constante.

<u>Sintetizando:</u>

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ \Leftrightarrow \mathrm{y}' = \frac{\text{- P(x, y)}}{\text{Q(x, y)}}$$

Si P y Q son derivables, con continuidad en un conjunto simplemente conexo y

$$P_y = Q_x \Rightarrow \exists \varphi(x,y) / \overline{\nabla} \varphi = (P,Q)$$

Toda solución a la ecuación difernecial se obtiene de $\varphi = k, k \in R$

Ejemplo:

✓ $\left(x^2 - 2y\right)dx + (y - 2x)dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \varphi / \overline{\nabla} \varphi = (P,Q) \text{ (Se verifica la condición de simetría)}$$

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2 - 2y \Rightarrow \varphi = \int \left(x^2 - 2y\right)dx + f(y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + f(y);\ \ f(y), \textit{independiente de } x$$

$$Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y - 2x \Rightarrow \varphi = \int (y - 2x)dy + g(x) = \frac{y^2}{2} - 2xy + g(x); \quad g(x), \textit{independiente de } y$$

$$\frac{x^3}{3} - 2xy + f(y) = \frac{y^2}{2} - 2xy + g(x)$$

$$\therefore \begin{cases} f(y) = \dfrac{y^2}{2} \\ g(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \quad \text{Luego, } \varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + \frac{y^2}{2}$$

La solución de la ecuación diferencial es $\varphi = \mathrm{k} \Rightarrow \frac{x^3}{3} - 2xy + \frac{y^2}{2} + C = 0 \quad (C = -k)$

<u>OBSERVACIÓN:</u> Toda ecuación de variables separables puede trabajarse como un caso particular de este tipo de ecuaciones.

III-4.b.- Ecuaciones reducibles a exactas.

En las aplicaciones no es frecuente que las ecuaciones diferenciales de 1º orden sean exactas.

También, puede demostrarse que cualquier ecuación normal de 1º orden puede transformarse en total exacta. Para ello, <u>en algunos casos</u>, basta elegir una función μ tal que, si la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no es exacta, lo sea la ecuación que se obtiene multiplicando ambos miembros por $\mu = \mu(x,y)$. Es decir, se debe encontrar μ no nula, tal que $\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$ sea una ecuación diferencial total exacta.

Lamentablemente, no se conoce ninguna forma sistemática para hallar estos **factores de integración** y, en la práctica, sólo pueden encontrarse para expresiones muy especiales. La situación más sencilla es aquella en que un factor integrante es una función escalar, es decir, el factor depende exclusivamente de la variable x o de la variable y.

El problema es entonces encontrar las condiciones que deben cumplir las funciones P y Q para que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ admita un factor integrante que dependa exclusivamente de x. (Análogamente se encuentran las restricciones para que $\mu = \mu(y)$).

Suponiendo que la ecuación $\mu(x)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$ es exacta, y sea $P^*(x,y) = \mu(x)P(x,y) \wedge Q^*(x,y) = \mu(x)Q(x,y)$, entonces al **derivar parcialmente** para hallar $P_y^* \wedge Q^*{}_x$, se obtiene:

$$P_y^*(x,y) = \mu(x)P_y(x,y) \wedge Q^*{}_x(x,y) = \mu(x)Q_x(x,y) + \mu'(x)Q(x,y)$$

Por la condición de simetría debe ser:

$$\mu(x)P_y(x,y) = \mu(x)Q_x(x,y) + \mu'(x)Q(x,y).$$

Despejando $\mu'(x)$, queda $\mu'(x) = \dfrac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}\mu(x)$.

Si $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ depende solamente de x, entonces para hallar μ, se resuelve $\mu'(x) = \dfrac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}\mu(x)$ como ecuación diferencial lineal en $\mu \wedge \mu'$ (lineal incompleta).

De la misma forma empleada para hallar un factor integrante que depende de x, puede probarse que existe un factor integrante que depende exclusivamente de y si $\dfrac{Q_x - P_y}{P}$ depende sólo de la variable y.

Lo más conveniente, para aplicar este método, es buscar la diferencia entre Q y P, y luego ver qué resulta al dividirla por P o por Q.

Ejemplo:

- ✓ $(y + \ln x)dx - xdy = 0 \qquad (x \neq 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P^*}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial Q^*}{\partial x} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no es exacta}$$

Se necesita hallar un factor integrante

$$\mu(y + \ln x)dx - \mu x dy = 0 / \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \mu(\mathrm{x}) \neq 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu_y(y + \ln x) + \mu$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\mu_x x - \mu$$

Considerando $\mu = \mu(x) \Rightarrow \mu_x = \mu' \wedge \mu_y = 0$

$$\mu = -\mu' x - \mu$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{2}{x}dx \quad (\mu \neq 0 \ \wedge \ \mathrm{x} \neq 0)$$

$\mu = \pm x^{-2} \Rightarrow \mu = x^{-2}$

Volviendo a la ecuación dada :

$\left(x^{-2}y + x^{-2}\ln x\right)dx - x^{-1}dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^{-2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \varphi$$

$\varphi_x = x^{-2}y + x^{-2}\ln x \Rightarrow \varphi = \int \left(x^{-2}y + x^{-2}\ln x\right)dx + f(y) = -x^{-1}y - x^{-1}(\ln x + 1) + f(y)$

$\varphi_y = -x^{-1} \Rightarrow \varphi = -\int x^{-1}dy + g(x) + C_2 = -x^{-1}y + g(x)$

Luego, $\quad -x^{-1}y - x^{-1}(\ln x + 1) + f(y)_1 = -x^{-1}y + g(x) \Rightarrow f(y) = 0$

$$g(x) = -x^{-1}(\ln x + 1)$$

Luego, la solución es $\varphi(x, y) = -x^{-1}y - x^{-1}(\ln x + 1) = k$, o bien

$-x^{-1}y - x^{-1}(\ln x + 1) + C = 0$ con $C = -k$

IV.- Método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de forma no normal

IV.1.- Ecuación de Clairaut: Definición y método de resolución

Se llama ecuación de Clairaut a una ecuación del tipo:

$$xy' - y + f(y') = 0$$

donde $f(y')$ es una función continua con derivada primera continua en cierto intervalo I, (es decir para $y' \in \mathrm{I}$)

Forma de resolución

Tomando $y' = P \Rightarrow xP - y + f(P) = 0 \Rightarrow y = x\,P + f(P)$.

Como f es derivable,

$$y' = xP' + P + f'(P)P'$$
$$P = xP' + P + f'(P)P'$$
$$0 = P'\left[x + f'(P)\right] \Rightarrow \text{alguno de los factores debe ser nulo}$$

- $P' = 0 \Rightarrow P = C$ y reemplazando en $y = x\,P + f(P)$, es

  $y = xC + f(C)\ \forall C \in R$ (Solución general)

- $x + f'(P) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -f'(P) \\ y = xP + f(P) = -f'(P)P + f(P) \end{cases}$

donde la solución está dada en forma paramétrica (parámetro P) y no es una solución general ni particular de la ecuación diferencial. A esta solución se la denomina **singular** y geométricamente representa la **envolvente** de todas las rectas dadas por $y = xC + f(C)$.

Recordar que la **solución singular** no es general pues no está comprendida dentro de la expresión donde aparece la constante arbitraria, ni es solución particular pues no se obtiene a partir de la general (no existe valor de la constante que nos permita alcanzarla).

Luego, la ecuación de Clairaut, admite como solución general a una familia de rectas y una solución singular que es la envolvente de dichas rectas.

Recordar: Una **curva** es **envolvente** de una familia de curvas si, y sólo si, en cada uno de sus puntos es tangente a la curva de la familia que pasa por dicho punto.

Ejemplo:

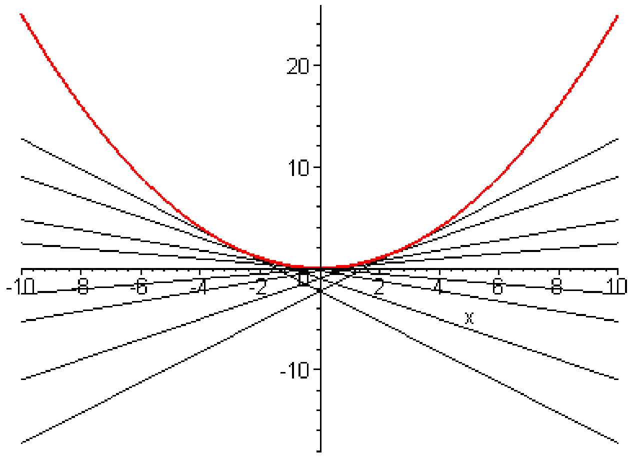
✓ $y = xy' - (y')^2$

$$y' = P$$
$$y = xP - P^2$$
$$y' = xP' + P - 2PP'$$
$$P = xP' + P - 2PP' \Rightarrow xP' - 2PP' = 0$$
$$(x\text{-}2P)P' = 0$$

- $P' = 0 \Rightarrow P = C\ \therefore y_G = Cx - C^2$ Solución general (familia de rectas no paralelas)

- $x - 2P = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2P \Rightarrow P = \dfrac{x}{2} \\ y = xP - P^2 = \dfrac{x^2}{4} \quad \therefore y_S = \dfrac{1}{4}x^2 \quad \text{Solución singular} \end{cases}$

(La parábola de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2$ es la envolvente de la familia de rectas propuesta como solución general)



Alexis Claude Clairaut fue uno de los matemáticos más precoces de la historia, aventajando incluso a Blaise Pascal.

Miembro de una familia de veinte hijos, sólo uno de los cuáles sobrevivió a su padre, matemático estimable, rivalizó en precocidad con un hermano menor, que murió de viruela a los 16 años.

Clairaut, francés, vivió entre 1713 y 1765.

V.- Resumen

Tipo de ecuaciones	**Característica**	**Forma de resolución**
Variables separables	f(x,y)=m(x). q(y)	$\int m(x)dx = \int \frac{dy}{q(y)}$
Homogéneas	f(x,y)= f(tx,ty) $t \neq 0$	Cambio de variable $u = \frac{y}{x} \rightarrow$ Var. separable
$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax_2 + b_2 y + c_2}\right)$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	Cambio de variable $x = X + x_0 \wedge y = Y + y_0$ → $\rightarrow$Homogénea
Lineal	$y' + p(x)y = r(x)$	Cambio de variable $y(x) = u(x).v(x) \wedge$ $\wedge\ v' + p(x)v = 0 \rightarrow .v(x)$
Ecuación de Bernoulli	$y' - p(x)y = y^n r(x)$	Cambio de variable $z = y^{1-n}$ → lineal
Diferencial exacta	$P_y = Q_x$	$\overline{\nabla}\varphi = (P,Q)$ → $\varphi = k$
Reducibles a exactas	Multiplicar $\mu(x), \mu(y)$ ó $\mu(x,y)$ → $P^*_y = Q^*_x$	$\mu'(x) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}\mu(x)$ $\mu'(y) = \frac{Q_x - P_y}{P}\mu(y)$
Clairaut	$xy' - y + f(y') = 0$	$y' = P$ $\rightarrow$sol. gral. y la envolv. (sol. sing.)

VI.- Bibliografía

[1] Apostol, T., "Calculus" Vol. I, Editorial Reverté.

[2] Apostol, T., "Calculus" Vol. II, Editorial Reverté

[3] Apuntes de clase, Ingeniería FRSN (UTN), Análisis Matemático II, Lic. Graciela Bojanich

[4] Ayres, F. "Ecuaciones Diferenciales", Colección Schaum.

[5] Coddington, E. A., "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias", Compañía Editorial Continental, S.A.

[6] Ghizzetti, A. "Complementos y Ejercicios de Análisis Matemático Vol. II", Editorial Universitaria Cultura Argentina.

[7] Ghizzetti, A. "Lecciones de Análisis Matemático Vol. II", Editorial Universitaria Cultura Argentina.

[8] Rabuffetti, T., "Introducción al Análisis Matemático " Vol. II, Editorial El Ateneo

[9] Apuntes de clase Licenciatura en Matemática, FCEI (UNR), " Análisis Matemático IV" Dr. Roffman E.

[10] Stewart, J., "Cálculo", International Thomson Editores.

NOTA: Para ***"Introducción a las Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden" Parte II,*** se proyecta abordar algunos temas muy vinculados con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que sólo por falta de tiempo no han sido tratados en este trabajo. A saber: Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Trayectorias ortogonales de una familia de curvas planas. Curvas integrales. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Aplicaciones. Ejercitación. Resolución de ciertas ecuaciones de orden superior.