

## UNIDAD 1: RELACIONES Y FUNCIONES

En Topología, para caminar con soltura y seguridad, es necesario conocer con precisión lo que son las *funciones*. Es menester fundamental, las ideas intuitivas y conceptos previos que, seguro, tenemos sobre estos temas. Aunque todos creamos entender lo que significa que “una función asocia a cada elemento  $x$  otro  $y$ ” o que “una función es una ley que a cada  $x$  le atribuye un  $y$ ” es necesario aclarar qué quiere eso de “asociar” o lo que es esa “ley que atribuye” a cada  $x$  un  $y$ .

En esta unidad extenderemos la teoría de conjuntos para incluir los conceptos de *relación* y *función*.

Las funciones intervienen en el álgebra, la trigonometría y el cálculo. Aquí, sin embargo, estudiaremos las funciones desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, y presentaremos algunas ideas nuevas que deberán tenerse en cuenta en el estudio de este tema.

### Comentarios históricos

La palabra *función*, en su forma latina, fue introducida en 1694 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para designar una cantidad asociada con una curva (como la pendiente de la curva o las coordenadas de un punto sobre la misma). En el año 1718, bajo la dirección de Johann Bernoulli (1667-1748), una función era considerada como una expresión algebraica formada por constantes y una variable. Las ecuaciones o fórmulas con constantes y variables surgieron posteriormente con Leonhard Euler (1707-1783). Su definición de *función* es la que generalmente se encuentra en los libros de matemática de nivel secundario. Además, hacia 1734, encontramos en el trabajo de Euler y Alexis Clairaut (1713-1765) la notación  $f(x)$ , que sigue en uso actualmente. La idea de Euler permaneció intacta hasta la época de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), quien encontró la necesidad de un tipo más general de función en su estudio de las series trigonométricas. En 1837, Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) estableció una formulación más rigurosa de los conceptos de variable, función y la correspondencia entre la variable independiente  $x$  y la variable dependiente  $y$ , cuando  $y = f(x)$ . El trabajo de Dirichlet enfatizaba la relación entre dos conjuntos de números y no pedía la existencia de una fórmula o expresión que relacionara los dos conjuntos. Con los desarrollos de la teoría de conjuntos ocurridos durante los siglos XIX y XX se llegó a una generalización de la función como un tipo particular de relación.

## RELACIONES

### Definición

Sean  $A, B \subset \mathcal{U}$ , llamamos **producto cartesiano** de  $A$  y  $B$ , y notamos  $A \times B$  a

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

### Observaciones

1. Si  $A, B$  son finitos, entonces  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  (Se sigue de la regla del producto).
2.  $A \times B$  no necesariamente es igual a  $B \times A$ . (Ejercicio)
3. La definición se extiende a más de 2 conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \left\{ \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{n\text{-uplas}} : a_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

4.  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

### Ejemplos

Sean  $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{4, 5, 6\}$ .

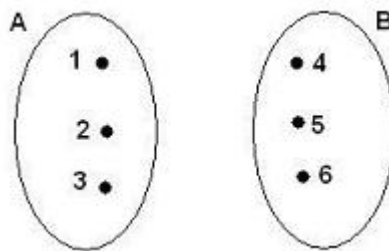
- $A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
- $A^2 = A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

### Definición

Sean  $A, B$  dos subconjuntos de  $\mathcal{U}$ , se llama **correspondencia entre  $A$  y  $B$**  o **relación entre  $A$  y  $B$** , a toda terna ordenada  $R = (A, B, G)$ , donde  $G$  es un subconjunto de  $A \times B$ , llamado **gráfica** de  $R$ .

$A$  se dice **conjunto de partida** y  $B$  **conjunto de llegada**.

### Ejemplos



- $R_1 = (A, B, G_1)$  con  $G_1 = \{(1, 4), (1, 5)\}$
- $R_2 = (A, B, G_2)$  con  $G_2 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

### Definición

$pr_1 G = \{x \in A / \exists y \in B : (x, y) \in G\}$  es el **dominio** de  $R$ .

$pr_2 G = \{y \in B / \exists x \in A : (x, y) \in G\}$  es la **imagen** de  $R$  (que notaremos  $R(A)$ ).

Si  $(x, y) \in G$ , diremos que:

- $x$  e  $y$  están relacionados por  $R$ ,
- $y$  es el correspondiente de  $x$  según  $R$ ,
- $R$  hace corresponder a  $x$  el elemento  $y$ ,

y escribiremos

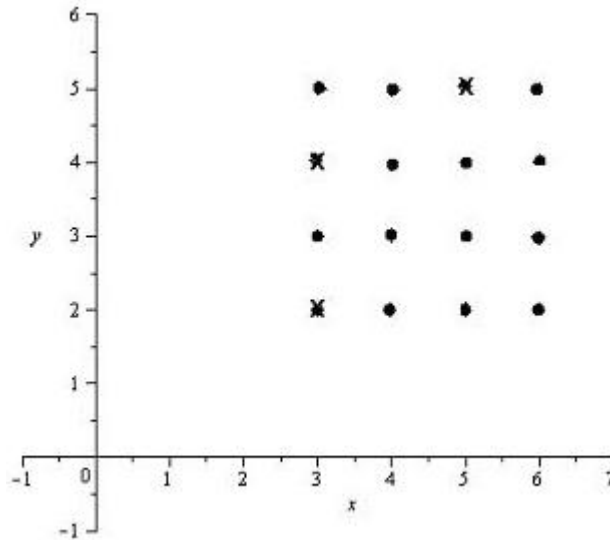
$$xRy$$

Luego,

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow xRy$$

### Ejemplos

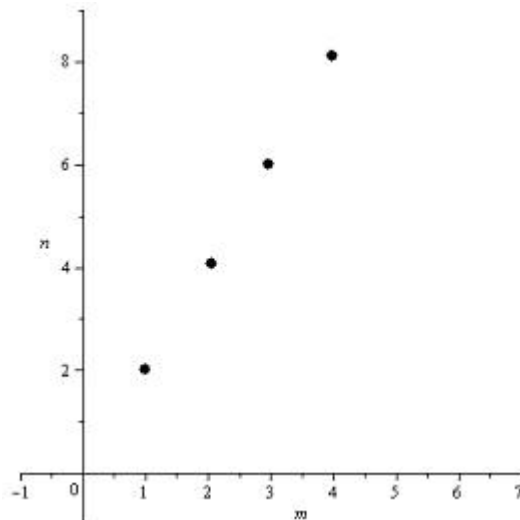
- Sean  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  y  $G = \{(3, 2), (3, 4), (5, 5)\}$



- : elementos de  $A \times B$
- x: elementos de  $G$

- $pr_1 G = \{3, 5\}$
- $pr_2 G = \{2, 4, 5\}$

- $R = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, G)$  con  $G = \{(m, n)/n = 2m\}$



**Observaciones**

Sean  $A, B, C \subset \mathcal{U}$ , entonces:

1.  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
2.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4.  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
5.  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

**Prueba:**

1. Trivial
2.  $(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$
3. Ejercicio
4. Ejercicio
5. Ejercicio

## FUNCIONES

### Definición

Una **función** es una relación  $f = (A, B, G)$  que verifica:

1.  $pr_1 G = A$
2.  $G$  es una *gráfica funcional*, es decir:

$$(x, y_1) \in G \wedge (x, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$$

### Observaciones

Notaremos  $f : A \rightarrow B$  y si  $(a, b) \in G$ , escribiremos  $b = f(a)$ .

- $A$  es el **dominio** de  $f$
- $B$  es el **codominio** de  $f$
- $f(A) = \{b \in B / \exists a \in A : (a, b) \in G\} = \{b \in B / \exists a \in A : a f b\} = \{b \in B / \exists a \in A : b = f(a)\}$  es la **imagen** de  $f$ .

### Ejemplos

1. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{5, 6, 7\} \subset \mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  y

- $G_1 = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7)\}$
- $G_2 = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7), (4, 6), (4, 7)\}$
- $G_3 = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7), (4, 6)\}$

Resulta que:

- $(A, B, G_1)$  no es función pues  $pr_1 G \neq A$
  - $(A, B, G_2)$  no es función pues  $G_2$  no es gráfica funcional
  - $(A, B, G_3)$  sí es función
2.  $\Gamma = (\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}, G) / x \Gamma y \Leftrightarrow x = y^2$  no es función pues:
    - (a)  $pr_1 = \mathbb{R}_0^+$
    - (b)  $(4, 2) \in G \wedge (4, -2) \in G$ . Luego,  $G$  no es gráfica funcional.
  3.  $\Gamma = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$  dada por  $x \Gamma y \Leftrightarrow x + y = r \Leftrightarrow y = r - x$ 
    - $pr_1 G = \mathbb{R}$
    - $(x, y_1) \in G \wedge (x, y_2) \in G \Rightarrow x + y_1 = r \wedge x + y_2 = r \Rightarrow x + y_1 = x + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$\therefore \Gamma$  es función

### Definición

$f : A \rightarrow B$  es **uno a uno** o **inyectiva** si dados  $a_1, a_2 \in A$  tales que  $f(a_1) = f(a_2)$ , entonces  $a_1 = a_2$ . Equivalentemente,  $f$  es inyectiva si  $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .

### Ejemplo

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  y  $G = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$ ,  $f : A \rightarrow B$  es *inyectiva*.

### Definición

Sea  $\Gamma = (A, B, G)$  una función y  $X \subset A$ . Se llama **imagen de  $X$  por  $\Gamma$**  a

$$\Gamma(X) = \{y \in B / \exists x \in X : x\Gamma y\}$$

Si  $X = \{x\}$ ,  $\Gamma(\{x\}) \underset{\text{notación}}{=} \Gamma(x) = \{y \in B / x\Gamma y\}$

### Ejemplos

1. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{w, x, y, z\}$  y  $f : A \rightarrow B$  dada por  $f = \{(1, w), (2, x), (3, x), (4, y), (5, y)\}$ .  
Sean  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{1, 2\}$ ,  $A_3 = \{1, 2, 3\}$ ,  $A_4 = \{2, 3\} \subset A$ .

- $f(A_1) = f(\{1\}) = f(1) = \{w\}$
- $f(A_2) = f(\{1, 2\}) = \{w, x\}$
- $f(A_3) = f(\{1, 2, 3\}) = \{w, x\}$
- $f(A_4) = f(\{2, 3\}) = \{x\}$

2. Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x^2$

- $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$
- $g(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
- $g([-2, 1]) = [0, 4]$

3.  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / h(x, y) = 2x + 3y$

- $h(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
- $h(\{0\} \times \mathbb{Z}^+) = \{3, 6, 9, 12, \dots\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}^+\}$

### Teorema

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $A_1, A_2 \subset A$ . Se verifica:

1.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2.  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3.  $f$  inyectiva  $\Rightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

### Prueba:

1. Ejercicio

2. Ejercicio

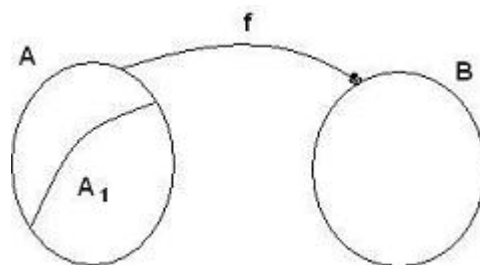
3.  $\subseteq$  probada en 2.

$$\supseteq) y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \Rightarrow (\exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1)) \wedge (\exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2))$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ inyectiva } \Rightarrow x_1 = x_2 = x} \exists x \in A_1 \cap A_2 : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \cap A_2)$$

### Definición

Sea  $f : A \rightarrow B$  y  $A_1 \subset A$ .  $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$  es la **restricción** de  $f$  a  $A_1$  si  $f|_{A_1}(a) = f(a)$ ,  $\forall a \in A_1$ .



Sea  $f : A_1 \rightarrow B$  y  $A_1 \subset A$ .  $g : A \rightarrow B$  es una **extensión** de  $f$  a  $A$  si  $g(a) = f(a), \forall a \in A_1$ .

### Ejemplos

Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}/f = \{(1, 10), (2, 13), (3, 16), (4, 19), (5, 22)\}$ .

- $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = 3x + 7$  es una extensión de  $f$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = 3x + 7$  es una extensión de  $g$
- $g$  es una restricción de  $h$
- $f$  es una restricción de  $g$  y de  $h$

### Definición

$f : A \rightarrow B$  es **sobre, sobreyectiva o suryectiva** si  $f(A) = B$ , esto es, si  $\forall b \in B, \exists a \in A/b = f(a)$ .

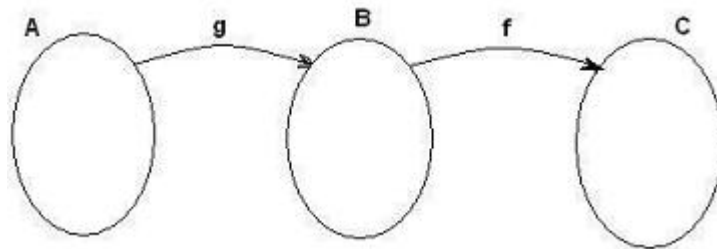
### Ejemplos

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2$  no es suryectiva (¿Por qué?).
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+/f(x) = x^2$  es suryectiva (¿Por qué?).
3.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/f(x) = 2x + 1$  no es suryectiva (¿Por qué?).
4. Si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{x, y, z\}$ , entonces:
  - $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$  es sobre (¿Por qué?).
  - $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$  es sobre (¿Por qué?).
  - $f_3 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, y)\}$  no es sobre (¿Por qué?).

### Nota

Si  $f : A \rightarrow B$  es suryectiva e inyectiva, diremos que es **biyectiva**.

### Definición

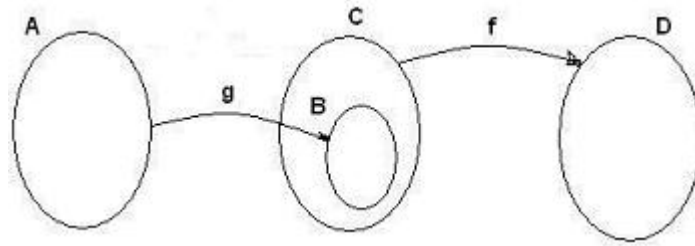


Sean  $g : A \rightarrow B$  y  $f : B \rightarrow C$ , definimos

$$(f \circ g) : A \rightarrow C / (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Veamos:

- ¿Es necesario que el codominio de  $g$  coincida con el dominio de  $f$ ?
- Observemos que no:
- Sean  $g : A \rightarrow B$  y  $f : C \rightarrow D$  con  $B \subset C$ ,

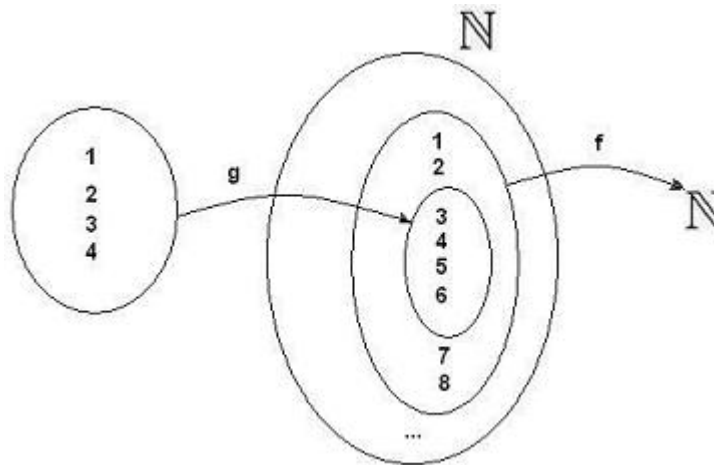


entonces,  $(f \circ g) : A \rightarrow D / (f \circ g)(x) = f(g(x))$  tiene sentido.

- ¿Es necesario que el codominio de  $g$  esté contenido en el dominio de  $f$ ?

Veamos:

Sean  $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N} / g(x) = x + 2$  y  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \mathbb{N} / f(x) = 3x$



$\mathbb{N}$  = codominio de  $g$ , no está contenido en el dominio de  $f$ , pero podemos hacer la composición pues  $Im(g) \subset Dom(f)$ .

Es decir, para hallar  $f(g(x))$ , lo que necesitamos es (vale decir, *es suficiente*) que  $Im(g) \subset Dom(f)$ .

Podemos dar así la siguiente **definición**:

Sean  $g : A \rightarrow B$  y  $f : B' \rightarrow C$  dos funciones tales que  $g(A) \subset B'$ , llamamos **composición** de  $f$  y  $g$  a:

$$f \circ g : A \rightarrow C / (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

### Ejemplos

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{w, x, y, z\}$ ,  $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$  y  $g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$ ,

- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x$
- $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = x$
- $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = y$
- $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(c) = z$

$$\text{Luego, } g \circ f = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$$

**Teorema**

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ ,

1.  $f, g$  inyectivas  $\Rightarrow g \circ f$  inyectiva
2.  $f, g$  sobreyectivas  $\Rightarrow g \circ f$  sobreyectiva
3.  $f, g$  biyectivas  $\Rightarrow g \circ f$  biyectiva

**Prueba**

1. Sean  $a_1, a_2 \in A$  tales que  $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \underset{g\text{-inyectiva}}{\Rightarrow} f(a_1) =$

$$f(a_2) \underset{f\text{-inyectiva}}{\Rightarrow} a_1 = a_2$$

2. Ejercicio
3. Ejercicio

**Teorema**

Sean  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  y  $h : C \rightarrow D$ ,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Es decir, la composición de funciones es *asociativa*.

**Prueba** (Ejercicio. *Sug.: Mostrar que  $(h \circ g) \circ f$  y  $h \circ (g \circ f)$  tienen el mismo dominio y codominio, y que actúan de la misma forma.*)

**Observación**

Podemos independizarnos de los paréntesis.  
Notaremos:  $f^3 = f \circ f \circ f = f \circ f^2 = f^2 \circ f$ .

**Definición**

Si  $\Gamma = (A, B, G)$  es una relación, la **inversa** de  $\Gamma$  es  $\Gamma^{-1} = (B, A, G^{-1})$  donde  $G^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in G\}$ .

**Definición**

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $f$  es **invertible** si  $\exists g : B \rightarrow A/f \circ g = id_B$  y  $g \circ f = id_A$ .  
Diremos que  $g$  es **inversa** de  $f$  y, recíprocamente, que  $f$  es **inversa** de  $g$ .

**Ejemplos**

Sean  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+/f(x) = \sqrt{x}$  y  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+/g(x) = x^2$ ,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x \Rightarrow f \circ g = id_B$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x \Rightarrow g \circ f = id_A$

Luego,  $f$  y  $g$  son inversas.

Supongamos ahora que,  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{x}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+/g(x) = x^2$ ,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  ¡**No** es la identidad!

**Teorema**

Sea  $f : A \rightarrow B$  invertible. Si  $\exists g : B \rightarrow A / g \circ f = id_A$  y  $f \circ g = id_B$ , entonces  $g$  es única.

**Prueba** (Ejercicio)

**Observación**

- Así, llamamos a  $g$  **la inversa** de  $f$  y notamos  $f^{-1}$ .
- $(f^{-1})^{-1} = f, f \circ f^{-1} = id_B$  y  $f^{-1}f = id_A$ .

**Teorema**

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,

$f$  admite inversa  $\Leftrightarrow f$  es biyectiva.

**Prueba**

$\Rightarrow$ ) Ejercicio

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f$  es biyectiva.

Dado  $b \in B, \exists! a \in A / f(a) = b$ .

Definimos  $g : B \rightarrow A / g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ .

Se puede ver, fácilmente, que  $g \circ f = id_A$  y  $f \circ g = id_B$ , por lo que  $g = f^{-1}$ .

**Ejemplos**

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2$  no es invertible.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ / f(x) = x^2$  sí es invertible y  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

**Teorema**

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  dos funciones que admiten inversa, entonces  $g \circ f : A \rightarrow C$  es invertible y

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Prueba** (Ejercicio)

**Definición**

Sea  $f : A \rightarrow B$  y  $B_1 \subset B$ . Llamaremos **preimagen** de  $B_1$  mediante  $f$  a:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A / f(x) \in B_1\}$$

**Observación**

Que tengamos preimagen no implica que  $f$  sea invertible (Ejercicio: Justificar).

**Ejemplos**

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  y  $f = \{(1, 7), (2, 7), (3, 8), (4, 6), (5, 9), (6, 9)\}$ ,

- $B_1 = \{6, 8\} \subset B, f^{-1}(B_1) = \{3, 4\}$
- $B_2 = \{7, 8\} \subset B, f^{-1}(B_2) = \{1, 2, 3\}$
- $B_3 = \{8, 9\} \subset B, f^{-1}(B_3) = \{3, 5, 6\}$
- $B_4 = \{8, 9, 10\} \subset B, f^{-1}(B_4) = \{3, 5, 6\}$

- $B_5 = \{10\} \subset B, f^{-1}(B_5) = f^{-1}(\{10\}) = \emptyset$

**Nota**

$$f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b)$$

**Teorema**

Sea  $f : A \rightarrow B$  y  $B_1, B_2 \subset B$ . Entonces,

1.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
2.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

**Prueba**

1.  $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
2. Ejercicio

**FIN**

**PRÁCTICA 1: Relaciones y funciones**

- Completar los ejercicios de la teoría.
- Sean  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  y  $C = \{3, 4\}$ . Hallar:
  - $A \times (B \cup C)$
  - $(A \times B) \cup (A \times C)$

¿Qué se puede observar?
- Sean  $A = \{x \in \mathbb{N}/x \leq 5\}$  y  $B = \{3, 4, 5\}$ . Se define la relación  $\Gamma = (A, B, G)$ , siendo  $G = \{(x, y) : x + y \leq 5\}$ .
  - Determinar si:
    - $(1, 4) \in G$
    - $(4, 1) \in G$
    - $2\Gamma 3$
    - $2\Gamma 5$
  - Expresar  $G$  por extensión.
  - Representar gráficamente  $A \times B$  y  $G$  en un sistema de coordenadas cartesianas.
  - Obtener, si existen, las imágenes de 1 y de 4, y las preimágenes de 3, 4 y 5, por la relación.
  - Obtener el dominio y la imagen de  $\Gamma$
- Sea  $T$  la relación, en  $\mathbb{R}$ , definida por

$$xTy \text{ si } 0 \leq x - y \leq 1$$

- Expresar  $T$  y  $T^{-1}$  como subconjuntos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
  - Graficarlos.
- Sea  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Determinar cuáles de las siguientes relaciones de  $X$  en  $X$  son funcionales:
    - $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
    - $g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$
    - $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$
  - Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  y  $f : A \rightarrow B$  definida como sigue:

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ es par} \\ 2 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

Mostrar que  $f$  no es inyectiva ni suryectiva.

- Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $C = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ ,  $f : A \rightarrow B$  definida por  $f(a) = a + 5$  y  $g : B \rightarrow C$  tal que  $g(b) = b + 5$ .  
Probar que ambas funciones son inyectivas y suryectivas.
- Analizar en cada caso si  $f$  es una función sobre o inyectiva:
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}/f(x) = x^2$
  - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}/f(x) = x^2$
  - $f : \mathbb{R} \rightarrow \{a \in \mathbb{R}/a \geq 0\}/f(x) = x^2$
- Consideremos  $A = [-1, 1]$  y sean las funciones  $f, g, h : A \rightarrow A$  definidas por:

$$f(x) = \text{sen}(x), g(x) = \text{sen}(\pi x), h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

Clasificarlas según sean inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. (Sug.: esbozar su gráfica)

10. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 2$$

Hallar (siempre que sea posible)  $g \circ f$  y  $f \circ g$ .

11. Dadas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Hallar  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

12. Dadas las funciones  $\Phi$  y  $\Psi$ , obtener (si es posible)  $\Psi \circ \Phi$  y dar  $Im(\Psi \circ \Phi)$ :

(a)  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}/\Phi(x) = \frac{x}{2}$  y  $\Psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\Psi(x) = 2x + 5$

(b)  $\Phi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\Phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  y  $\Psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\Psi(x) = x + 3$

13. Analizar si la siguiente función es biyectiva. En caso afirmativo, determinar la función inversa:

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = \frac{x-1}{x} \text{ (para } x \neq 0)$$