UNIDAD 0: PRELIMINARES

0.1 - INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDEA. PLANIMETRÍA: CONCEPTOS PRIMITIVOS, DEFINICIONES, AXIOMAS. FIGURAS PLANAS ELEMENTALES.

Comentarios históricos

Los dibujos y diseños del hombre neolítico revelan su interés por las relaciones espaciales y preparan el camino a la geometría. Ese interés puede haber surgido de su sentido estético como, también, de prácticas rituales primitivas.
La palabra **GEOMETRÍA** deriva de los vocablos *geo*= tierra y *metría*= medida.
Los primeros vestigios de escritura del hombre, provienen de la Mesopotamia y de Egipto, y datan de 3000 a.C.
Los vestigios de resultados geométricos más antiguos fueron descubiertos en la India y se denominan *Sulvasutras* o *"reglas de la cuerda"*. Se trata de relaciones muy sencillas que, al parecer, se usaban en la construcción de altares y templos.
Los *"tensadores de cuerdas"* (agrimensores) en Egipto tenían motivaciones más prácticas que sus colegas de la India, según sugieren los historiadores. Para *Herodoto*, la geometría habría surgido en Egipto de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del Nilo. En el polo opuesto, *Aristóteles* sostenía que el desarrollo de la geometría en Egipto, se debía a la existencia de una amplia clase sacerdotal ociosa.
Entre la documentación histórica se destaca el *Papiro de Ahmes*, también llamado *Papiro de Rhind*. Es un rollo de 30 cm por 6 cm, copiado por el escriba *Ahmes*, aproximadamente 1650 a.C. y que *Henry Rhind*, anticuario escocés, comprara en 1858 en un comercio del Nilo. Actualmente se encuentra en el *British Museum* de Londres. Contiene varios problemas geométricos y muestra, por ejemplo, que para calcular el área de un triángulo isósceles hay que tomar la mitad de lo que hoy llamaríamos la base, y multiplicarlo por lo que hoy nombraríamos como su altura. Para obtener este resultado ya *usaban* lo que más tarde se conocería como *relación pitagórica*. El *problema 56* contiene los rudimentos de la trigonometría. El principal defecto de la geometría egipcia radica en la falta de distinción, clara y precisa, entre las relaciones que son exactas y las que son sólo aproximadas.
Los babilonios dejaron más de 50000 tablillas de arcilla, muchas, aproximadamente, de 2000 a.C., con escritura *cuneiforme*. Algunas de ellas de contenido matemático se encuentran actualmente en la *Universidad de Columbia* y en la de *Yale*. Los babilonios, según la opinión generalizada, habrían sido mejores algebristas que los egipcios, pero habrían contribuido menos a la geometría. Nadie pone en duda la primera afirmación, pero las tablillas procedentes de *Susa*, 300 km al este de Babilonia, muestran que las áreas de polígonos calculadas por los babilonios fueron casi tan precisas como las de los egipcios. La geometría no era para ellos una teoría matemática, como lo es para nosotros, sino un cierto tipo de aritmética o álgebra aplicada, en la que las figuras venían representadas por medio de números.
En la historia de la matemática, Grecia juega un papel fundamental, y sus orígenes se centran en las llamadas *Escuelas Jónica y Pitagórica*, cuyos representantes principales fueron, respectivamente, *Thales de Mileto*, el 1^o de los *siete sabios griegos* (624-548 a.C.) y *Pitágoras de Samos* (580-500 a.C.); aunque la reconstrucción de su pensamiento se basa solamente en informaciones fragmentarias y en tradiciones transmitidas y elaboradas en siglos posteriores.
No ha quedado ningún documento matemático, ni científico en general, anterior a la época de *Platón* en el siglo IV a.C. Es en esa época, en el siglo V a.C., que, según cuenta *Plutarco*, aparecen los tres problemas que fascinaron a los matemáticos por más de 2000 años:

- *La cuadratura del círculo:* Construir, usando únicamente regla y compás, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.
- *La duplicación del cubo:* Construir, usando únicamente regla y compás, la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble que el de otro cubo de arista conocida *(Problema de Delos)*.
- *La trisección del ángulo:* Construir, usando únicamente regla y compás, un ángulo igual a un tercio de un ángulo dado.

Estos problemas clásicos de la antigüedad motivaron a los matemáticos griegos más brillantes y también a los de los siglos posteriores, hasta que 2200 años después se demostró que eran irresolubles.
El siglo IV a.C. se abre con la muerte de *Sócrates* en 399 a.C.

La geometría que había tenido un comienzo experimental, se vuelve una ciencia abstracta con *Platón*. La definición de *“línea”* como *longitud sin anchura*, parece haber tenido origen en la *Escuela de Platón*. Lo mismo que la idea de una *“línea recta”* es la que *yace igualmente con respecto a todos sus puntos*.
En el 306 a.C., *Ptolomeo* gobierna la parte egipcia del imperio griego de *Alejandro Magno* y funda en Alejandría una escuela o instituto, conocido como el *Museo de Alejandría*. Como profesores de esta escuela, llama a un grupo de sabios de primera línea, entre los cuales estaba el autor del texto de matemática más famoso de la historia de la humanidad, los *Elementos (Stoixeia)* de *Euclides*. Sobre la vida de *Euclides* se conoce muy poco y se supone que habría estudiado con los discípulos de *Platón*. También se conjetura que *Euclides* no habría sido una persona sino un grupo de sabios.
Los *“Elementos”* están divididos en 13 libros o capítulos, de los cuales los primeros 6 son sobre geometría plana elemental, los 3 siguientes son sobre teoría de números, el libro X sobre las magnitudes inconmensurables y los tres últimos sobre geométría de los sólidos. No eran, como se piensa a veces, un compendio de todos los conocimientos geométricos, sino más bien un texto introductorio que cubría toda la matemática *“elemental”*: *la aritmética (o teoría de números), la geometría sintética (de puntos, rectas, plano, círculos y esferas) y el álgebra (no en el sentido simbólico sino su equivalente con ropaje geométrico).*
Es *Euclides* con sus *“Elementos”* que transforma a la matemática en axiomática deductiva. Es quien tuvo el don de darse cuenta de la existencia de proposiciones básicas, que no se podían demostrar y que consideró como verdaderas, a las que llamó *Postulados o Axiomas*; y de términos que había que definir. Es a partir de estas definiciones y postulados que debían *“‘demostrarse”* todos los demás resultados, haciendo uso de las *“nociones comunes”*.
Transcribimos a continuación sus famosos *“cinco postulados”* y las *“nociones comunes”*.

Postúlese lo siguiente:

1. *Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.*
2. *Se puede prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.*
3. *Se puede describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.*
4. *Que todos los ángulos rectos son iguales.*
5. *Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.*

Nociones comunes:

1. *Cosas que son iguales a la misma cosa, son iguales entre sí.*
2. *Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.*
3. *Si iguales se restan a iguales, los restos son iguales.*
4. *Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.*
5. *El todo es mayor que la parte.*

Los cuatro primeros postulados de *Euclides* no tuvieron objeciones, pero el quinto dio que hablar. Su redacción, un poco extensa, inducía a pensar que no era un axioma sino un teorema y, por tanto, que se podía demostrar (deducir) de los otros cuatro. Llevó 2000 años a los geómetras darse cuenta que su demostración no era posible. Este quinto postulado, que actualmente se enuncia *“Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella”*, conocido como el *postulado de las paralelas*, fue negado como tal y dio nacimiento a otras geometrías, llamadas *no euclideanas*. Por ello, la geometría que entre sus axiomas contiene al quinto postulado se llaman *euclideanas o métricas*.
Se puede fijar el nacimiento de las geometría no euclideanas en los trabajos de *Lobachewesky* (1793-1856), *Gauss* (1777-1855) y *Boljai* (1802-1860) quienes descubrieron que se podía avanzar, sin encontrar contradicciones, no imponiendo el quinto postulado. Se dice que el primer geómetra no euclideano fue el mismo *Euclides*, puesto que en su obra evita, en lo posible, el uso del quinto postulado.
Si bien *Albert Einstein* utilizó una de estas geometrías, llamada *geometría hiperbólica*, para desarrollar su *Teoría de la Relatividad*, la *Geometría Euclideana* sigue teniendo el mismo valor, y se adapta perfectamente a la realidad que nos rodea, resuelve los problemas del topógrafo, del agrimensor, del constructor, del mecánico, del astrónomo, etc., lo que la liga a su nombre original (GEOMETRÍA), más de lo que quizás creía *Platón*.

0.1.1 - PUNTOS Y RECTAS EN EL PLANO. AXIOMAS DE INCIDENCIA. DEFINICIONES.

Comenzaremos con el estudio de la Geometría estableciendo qué elementos básicos permitirán construir la cadena que conforma esta ciencia.
Estos elementos son: punto, recta y plano.
A pesar de conocerlos y operar con ellos no podríamos intentar su definición, ya que no existe una forma de hacerlo sin recurrir a otros términos que, a su vez, deberíamos definir, en una sucesión interminable, buscando cuál es el concepto primero o primitivo, no definible, que permitiera definir a los otros conceptos.
Aceptamos así que:

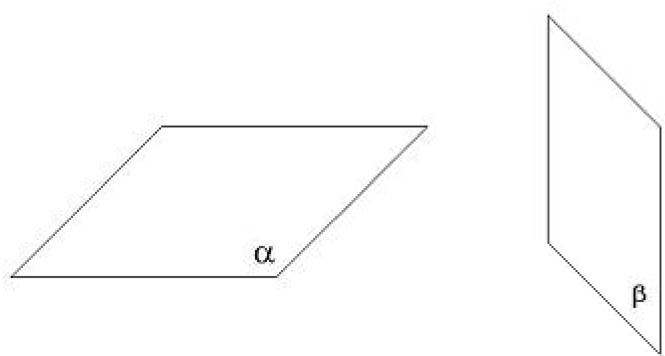
PUNTO, RECTA Y PLANO SON CONCEPTOS PRIMITIVOS.

Estos conceptos primitivos refieren a *ideas* o *abstracciones* y los dibujos que utilizamos para visualizarlos son sólo representaciones físicas de tales elementos que, como idea, sólo existen en nuestras mentes.

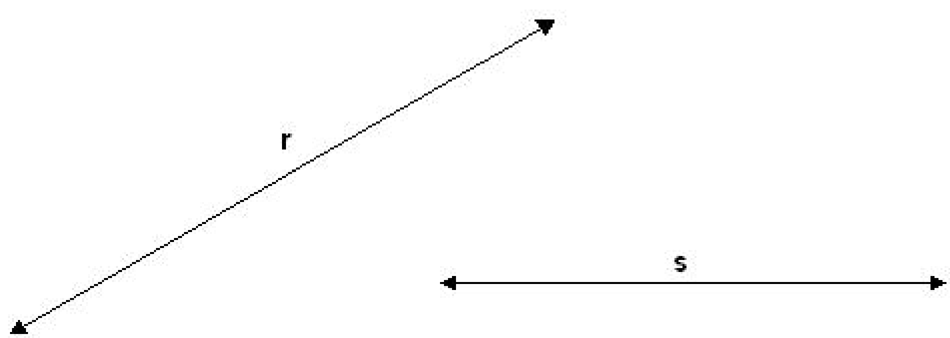
Para visualizar **puntos** usaremos $\bullet$ o $\times$ y convenimos en nombrarlos con letras de imprenta mayúscula:

$\bullet A$	$\times B$
punto A	punto B

El conjunto de todos los puntos constituye el **espacio**.
Los **planos** son subconjuntos propios del espacio. Aunque los visualicemos en forma acotada, nuestra idea de *plano* carece de bordes o fronteras y los podemos representar como sigue:



Para nombrarlos, usaremos letras griegas: $\alpha, \beta, \pi, ...$ (plano α, plano β, plano π, ...).
Las **rectas** son subconjuntos propios de los planos y las visualizamos con los siguientes dibujos:



Las designaremos con letras de imprenta minúscula: $r, s, ...$ (recta r, recta s, ...).

Estas ideas no son precisas, sino tan sólo visualizaciones de los conceptos. Para poder trabajar con ellos necesitamos formalizar, es decir, fijar exactamente cómo se comportan estos conceptos primitivos entre sí.
Vamos a comenzar el estudio con la parte de la geometría conocida como **planimetría**, es decir, la que trata sobre las figuras del plano.

Fijaremos las reglas del juego para que quede claro cómo trabajar con los conceptos primitivos, ellas serán los *axiomas*.

Axioma o postulado: es un enunciado fundamental y primitivo de propiedades que vinculan a los elementos primitivos, cuya validez no se cuestiona.

Sobre estas bases, conceptos primitivos y axiomas, deberá apoyarse el descubrimiento razonado y justificado de nuevas relaciones entre las figuras que se definen a partir de los primeros: ellos serán los **teoremas**, y el proceso mediante el cual se justifica y deduce la validez de los teoremas se denomina **demostración**.
Para demostrar un teorema se recurre a los axiomas, conceptos primitivos y/o resultados demostrados anteriormente.

Teorema: es una proposición que se deduce lógicamente como consecuencia de otras anteriores.

En este proceso pueden describirse y demostrarse *propiedades* que cumplen ciertos términos geométricos, no primitivos, creados por la mente humana y definidos a partir de conceptos anteriores.

Definición de un *término geométrico*: es la especificación de todas las características que lo distinguen como tal.

Al desarrollo lógico sistemático de la geometría lo podemos sintetizar en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Términos}\ \text{geométricos} & & \textit{Propiedades} \\ \textbf{Conceptos primitivos} & \longrightarrow & \textbf{Axiomas} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textbf{Definiciones} & \longrightarrow & \textbf{Teoremas} \end{array}$$

Comenzaremos enunciando los **tres axiomas de incidencia o pertenencia.**

- **Axioma 1:**
  El plano es un conjunto infinito de puntos.
- **Axioma 2:**
  Las rectas son subconjuntos propios del plano.
  $(\forall r \subset \pi, \exists A \in r \wedge B \in \pi / B \notin r)$
- **Axioma 3:**
  Dos puntos distintos del plano determinan una única recta a la cual ellos pertenecen.
  $(A \neq B, \{A, B\} \subset \pi \Rightarrow \exists! r \subset \pi / \{A, B\} \subset r)$

De acuerdo con el Axioma 3, si r es la recta determinada por A y B, la designaremos con la notación $r = \overleftrightarrow{AB}$.

<u>**Definición 1**</u>

Puntos colineales o alineados son todos aquellos que pertenecen a una misma recta.
Observemos que el Axioma 3 nos dice que dos puntos del plano siempre son colineales.

<u>**Teorema 1**</u>

Dos rectas distintas r y s no se cortan (no tienen puntos en común) o se cortan en un único punto. Vale decir:

$$r \neq s \Rightarrow r \cap s = \emptyset \vee r \cap s = \{A\}$$

Hipótesis o datos:
$r \neq s$
Tesis o conclusión:
$r \cap s = \emptyset \vee r \cap s = \{A\}$
Demostración:
Dadas las rectas $r \neq s$, deberá ser:

$$r \cap s = \emptyset \vee r \cap s = \{A\} \vee r \cap s = \{\text{más de un punto}\}$$

Bastará probar que la última posibilidad no puede presentarse nunca.
Para ello razonamos *por el* ***ABSURDO***, esto es, suponemos que $r \cap s = \{\text{más de un punto}\}$ y debemos llegar a contradecir la hipótesis ($r \neq s$).

$r \cap s = \{\text{más de un punto}\} \Leftrightarrow \exists A \neq B / \{A, B\} \subset r \cap s \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{def.}\cap} \{A, B\} \subset r \wedge \{A, B\} \subset s \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Ax.3}} \overleftrightarrow{AB} = r \wedge \overleftrightarrow{AB} = s \Leftrightarrow$ $r = s$ *Absurdo*.

$$\therefore \text{Debe ser } r \cap s = \emptyset \vee r \cap s = \{A\}.$$

Definición 2

Dos rectas distintas que se cortan se llaman **rectas secantes**.

Definición 3

Punto exterior a una recta es aquel que no pertenece a ella.

$$(A \text{ es exterior a } r \Leftrightarrow A \notin r)$$

Observemos que esta definición tiene sentido gracias al Axioma 2.

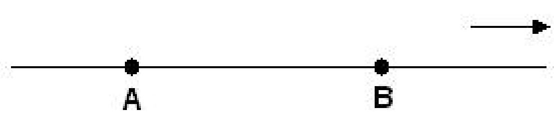
0.1.2 - ORDEN EN LA RECTA Y EN EL PLANO. AXIOMAS DE ORDEN.

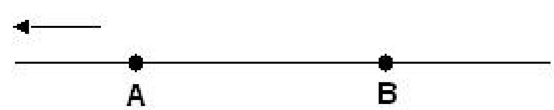
Axioma 4

Los puntos de cualquier recta r del plano están ordenados según dos órdenes opuestos, de tal manera que, fijado uno de estos órdenes, se cumple que:

Dado dos puntos distintos A y B en r, entonces:

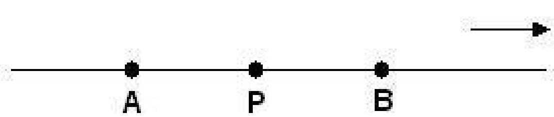
A precede a B (B sigue a A)	o	B precede a A (A sigue a B)

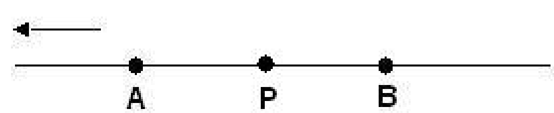




Definición 4

Sean A y B dos puntos de r, un punto $P \in r$ **está entre** A **y** B, si A precede a P y B sigue a P, o bien, si B precede a P y A sigue a P.





Axioma 5

Dados dos puntos cualesquiera de una recta, existe por lo menos otro entre ambos. Y dado un punto de r, existe por lo menos uno que le precede y otro que le sigue.

$$(\forall A \neq B, \{A, B\} \subset r, \exists P \in r \text{ entre } A \text{ y } B)$$
$$(\forall P \in r, \exists A \in r \text{ y } B \in r / P \text{ está entre } A \text{ y } B)$$

Observación:

El Axioma 4 también se suele enunciar diciendo que *la recta es un conjunto linealmente ordenado*. El Axioma 5 nos dice, en su primera parte, que en la recta NO hay puntos consecutivos, y en la segunda, que NO hay primer ni último punto.

Definición 5

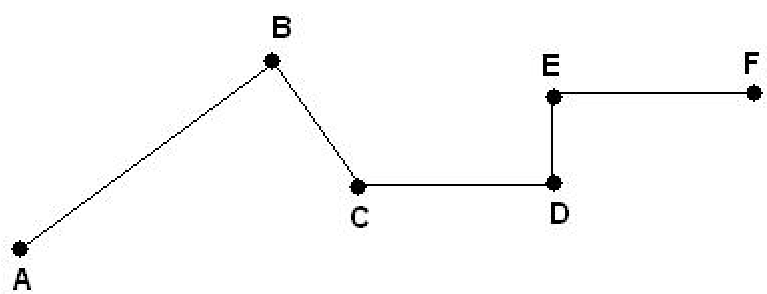
Semirrecta de origen O es el conjunto formado por un punto $O \in r$ y todos los puntos que le siguen (o que le preceden) en una de los órdenes de r.
Si $\{O, P\} \subset r$, anotaremos: $\overrightarrow{OP}$= semirrecta de origen O que contiene al punto P.
Si $Q \in r$ es tal que O está entre Q y P, llamaremos **semirrecta opuesta a** $\overrightarrow{OP}$ a la semirrecta $\overrightarrow{OQ}$ de origen O que contiene al punto Q y que anotaremos *op* $\overrightarrow{OP}$.

Definición 6

Dada una recta r y dos puntos A y B en r, el conjunto formado por los puntos A y B, y todos los puntos entre A y B se llama **segmento AB** y se nota, indistintamente $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$. Los puntos A y B son los **extremos del segmento**. Los otros puntos son los **puntos interiores** de $\overline{AB}$.
Segmento nulo es aquel cuyos extremos son coincidentes. Es un punto del plano.

Definición 7

Dos segmentos se llaman **consecutivos** si sólo poseen un extremo en común.



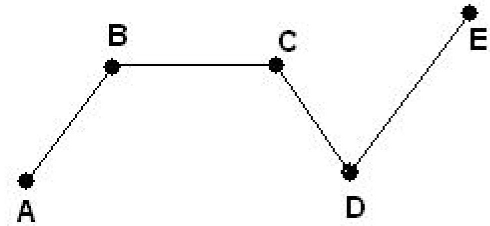
Son *consecutivos*: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$; $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$.
No son *consecutivos*: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$; etc.

Definición 8

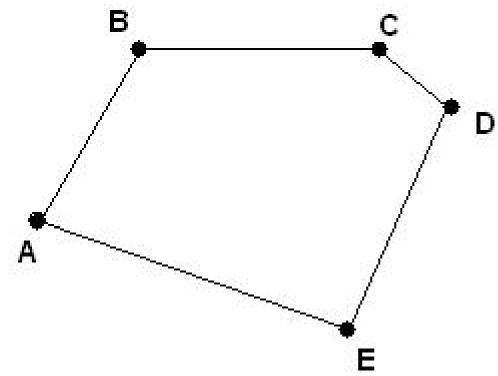
Dos segmentos se llaman **colineales** si todos sus puntos lo son, es decir, si están contenidos en la misma recta.

Definición 9

Una **poligonal** es un conjunto finito, no vacío y ordenado de segmentos tales que sólo son consecutivos cada segmento con el anterior y el posterior en el orden.
Una **poligonal cerrada** es una poligonal donde el primer y el último segmento también son consecutivos.



Poligonal



Poligonal cerrada

Del mismo modo que, por el Axioma 4, un punto *"separa"* a los puntos de una recta en dos regiones (semirrectas), el proximo postulado nos dice, en forma análoga, que la recta *"separa"* al plano en dos regiones.

Axioma 6

Toda recta r del plano establece una clasificación de los puntos del mismo no pertenecientes a ella, en dos únicas clases o regiones, tales que:

1. Todo punto exterior a la recta r pertenece a una u otra región.
2. Todo segmento que une dos puntos de una misma región no corta a r, mientras que todos los que unen dos puntos de distinta región, cortan a r.

(Si $r \subset \pi, \{A, B, C\} \subset \pi, A \notin r, B \notin r, c \notin r$, entonces:

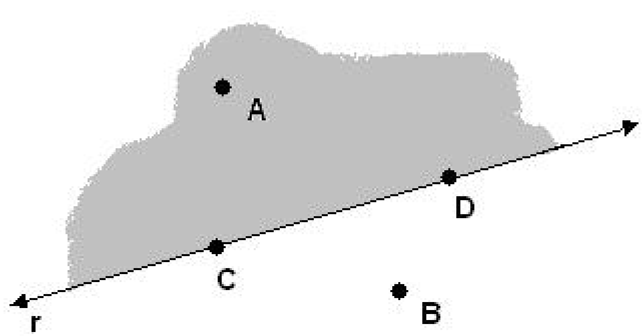
- B y C están en la misma región $\Leftrightarrow \overline{BC} \cap r = \emptyset$
- A y B están en distinta región $\Leftrightarrow \overline{AB} \cap r = \{P\}$)

Definición 10

Dada una recta r del plano, cada uno de los dos subconjuntos disjuntos en que la recta divide al plano se llama **semiplano abierto**.
La unión de cada semiplano abierto con r se denomina **semiplano**.
La recta r se llama **frontera** de los dos semiplanos.
Los dos semiplanos distintos definidos por la misma recta r se llaman **semiplanos opuestos**.

Para nombrar a un semiplano se recurre a la frontera r y a otro punto cualquiera del semiplano que no esté en r.
Así, en la siguiente figura, el semiplano sombreado se simboliza:

$$semp_r(A) \text{ o } semp_{\overleftrightarrow{CD}}(A)$$



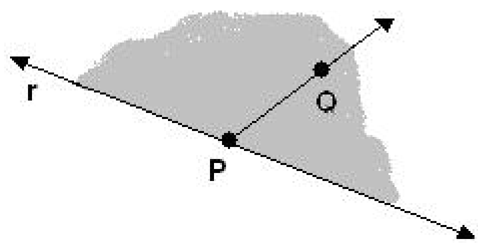
El semiplano opuesto a $semp_r(A)$ es $semp_r(B)$, que también notaremos:

$$semp_r(noA)$$

Teorema 2

Si $P \in r$ y $Q \notin r$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ está contenida en el semiplano definido por r que contiene a Q.

Hipótesis o datos:
$P \in r$ y $Q \notin r$
Tesis o conclusión:
$\overrightarrow{PQ} \subset semp_r(Q)$
Demostración:
$P \in r, Q \notin r \underbrace{\Rightarrow}_{Teo.1} \overleftrightarrow{PQ} \cap r = \{P\}$



Debemos probar que: $T \in \overrightarrow{PQ} \Rightarrow T \in semp_r(Q)$.
Si $T \in \overrightarrow{PQ}, T \neq P$, resultará $T \in semp_r(Q) \vee T \in semp_r(noQ)$. Bastará, entonces, probar que $T \notin semp_r(noQ)$.
Ejercicio: completar la demostración, razonando "por el ABSURDO".

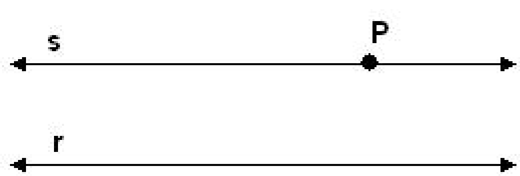
0.1.3 - EL AXIOMA DE LAS PARALELAS O "QUINTO POSTULADO".

Definición 11

Dos rectas de un plano son **paralelas** si no tienen ningún punto en común o todos sus puntos son comunes. Es decir, si no son secantes.
Lo simbolizamos: $r//s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset \vee r \cap s = r = s$
Dos segmentos o dos semirrectas son **paralelos** sii están contenidos, respectivamente, en rectas paralelas.

Axioma 7

Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una recta paralela a ella.
(Dados r y $P \notin r, \exists! s / P \in s, s//r$)



Teorema 3

La relación de *paralelismo* es una *relación de equivalencia*, esto es:

1. Es *reflexiva*: $r//r$
2. Es *simétrica*: $r//s \Rightarrow s//r$

3. Es *transitiva*: $r//s \wedge s//t \Rightarrow r//t$

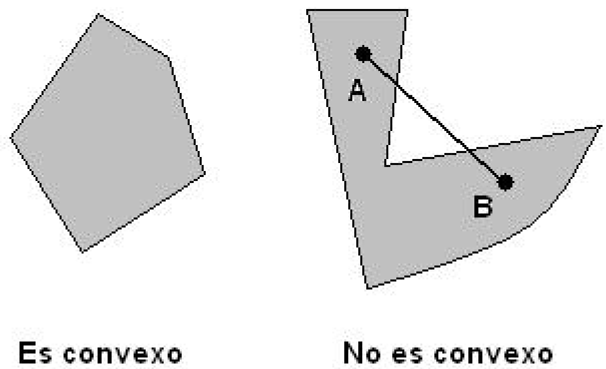
Demostración: Ejercicio.

0.1.4 - FIGURAS CONVEXAS. ÁNGULOS Y POLÍGONOS.

Definición 12

Un subconjunto C del plano es **convexo** si para todo par de puntos A y B en C, el segmento $\overline{AB}$ está en C.

$$\left(C \text{ convexo } \Leftrightarrow \forall \{A, B\} \subset C \text{ resulta } \overline{AB} \subset C\right)$$



Ejercicio: Buscar ejemplos.

Teorema 4

La intersección de dos conjuntos convexos es un convexo.

Hipótesis o datos
C_1 convexo $\Leftrightarrow \forall \{A, B\} \subset C_1$ es $\overline{AB} \subset C_1$
C_2 convexo $\Leftrightarrow \forall \{C, D\} \subset C_2$ es $\overline{CD} \subset C_2$

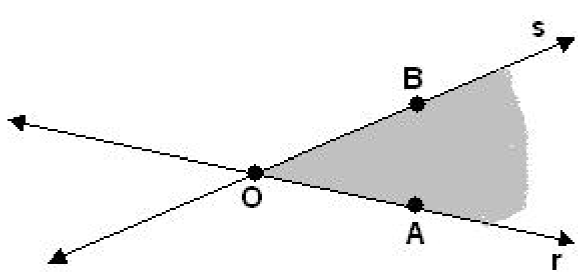
Tesis o conclusión
$C_1 \cap C_2$ convexo $\Leftrightarrow \forall \{P, Q\} \subset C_1 \cap C_2$ es $\overline{PQ} \subset C_1 \cap C_2$
Demostración
Ejercicio

Ejercicio: Analizar cómo es la unión de dos conjuntos convexos.

Definición 13

Se llama **ángulo convexo** o simplemento **ángulo**, a la intersección de dos semiplanos cuyas fronteras son, respectivamente, dos rectas secantes.
El punto de intersección de las secantes se llama **vértice** del ángulo y las semirrectas que limitan al ángulo se llaman **lados**.
Los puntos del ángulo que no pertenecen a los lados del mismo se llaman **puntos interiores** y su conjunto, **interior del ángulo**.

Para simbolizar y nombrar los ángulos, recurriremos a elementos auxiliares.
Sean r y s dos rectas secantes, $r \cap s = \{O\}, A \in r, B \in s$.



El ángulo sombreado se simboliza, indistintamente, $A\hat{O}B, B\hat{O}A, \angle AOB$ o $\angle BOA$ y es:

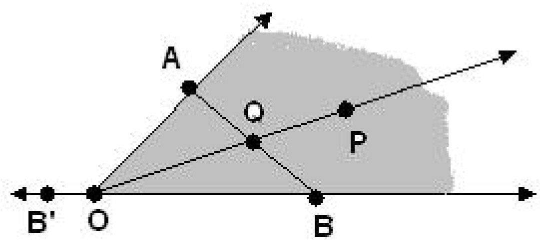
$$A\hat{O}B = B\hat{O}A = \angle AOB = \angle BOA = semp_r(B) \cap semp_r(A)$$

Los lados son $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, el vértice es O y los puntos interiores son los de la región sombreada.

Observemos que el nombre de ángulo convexo tiene sentido ya que es la intersección de dos semiplanos que son convexos, luego es convexo por el Teorema 4.

<u>Teorema 5</u>

Toda semirrecta con origen en el vértice de un ángulo y cuyos otros puntos son interiores al mismo, corta a cualquier segmento cuyos extremos pertenecen uno a cada uno de los lados del ángulo y no son el vértice.

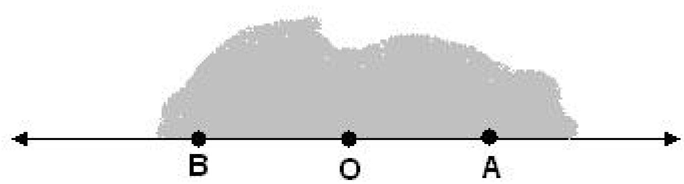


Demostración
Sean A y B dos puntos cualesquiera de cada uno de los lados del ángulo $A\hat{O}B$ y P un punto interior al mismo.
Debemos probar que $\overrightarrow{OP} \cap \overline{AB} = \{Q\}$.
Sea $B' \in op\, \overrightarrow{OB}$.
Luego, $B' \in semp_{\overleftrightarrow{OA}}(noP)$ y es $\overline{B'A} \cap \overrightarrow{OP} = \emptyset$.
Como $A \in semp_{\overleftrightarrow{OB}}(P)$ es $\overline{B'A} \cap op\, \overrightarrow{OP} = \emptyset$.
Resulta $\overline{B'A} \cap \overleftrightarrow{OP} = \emptyset$, es decir que B' y A pertenecen al mismo semiplano abierto definido por $\overleftrightarrow{OP}$ y como B' y B están en semiplanos opuestos, B y A también lo están, luego $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{OP} = \{Q\}$.
Pero $Q \in \overline{AB} \subset A\hat{O}B \Rightarrow Q \in \overrightarrow{OP}$.

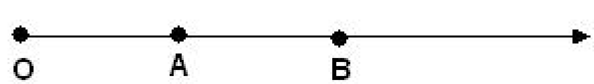
<u>Definición 14</u>

Si en la Definición 3 admitimos que las dos rectas sean coincidentes, podemos definir también otros tipos de ángulos:

Ángulos llano:
Es un semiplano, y sus lados son las semirrectas opuestas que limitan el semiplano.

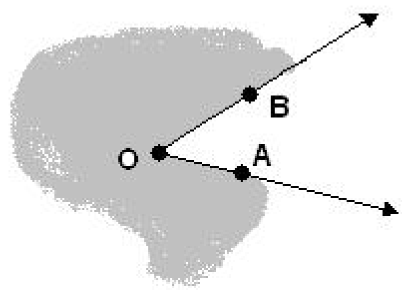


Ángulo nulo:
Es una semirrecta, no tiene puntos interiores y sus lados son coincidentes con la semirrecta.

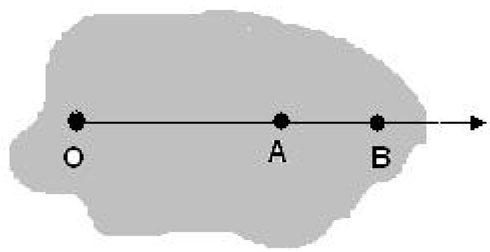


También podemos extender la definición a un conjunto no convexo:

Ángulo cóncavo: Es la unión de dos semiplanos definidos por rectas secantes, vale decir, $semp_{\overleftrightarrow{OA}}(noB) \cup semp_{\overleftrightarrow{OB}}(noA)$, donde $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas no opuestas.



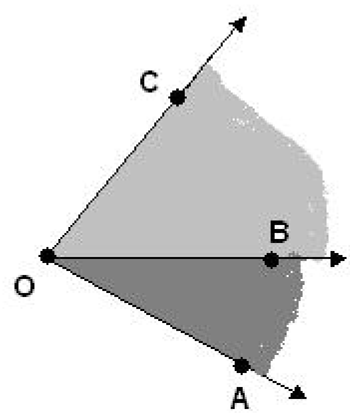
Ángulo pleno:
Es un plano y sus lados son dos semirrectas coincidentes.



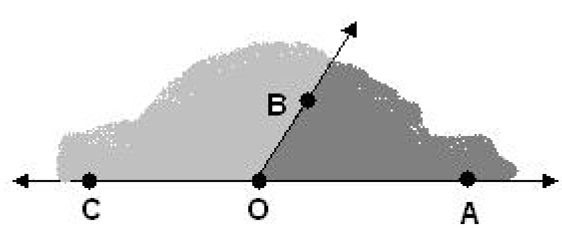
<u>Definición 15</u>

Dos ángulos son:

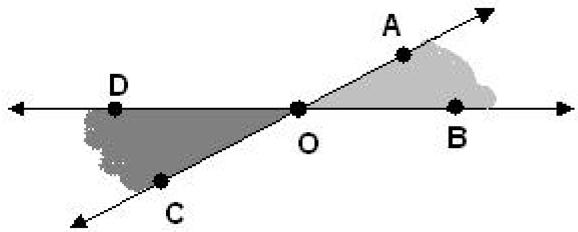
- **consecutivos**, si sólo poseen un lado común; ($A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ consecutivos, $\overrightarrow{OB}$ lado común).



- **adyacentes**, si son consecutivos y la unión de los lados no comunes es una recta; ($\overrightarrow{OB}$ lado común, $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OC}=\overleftrightarrow{AC}$).

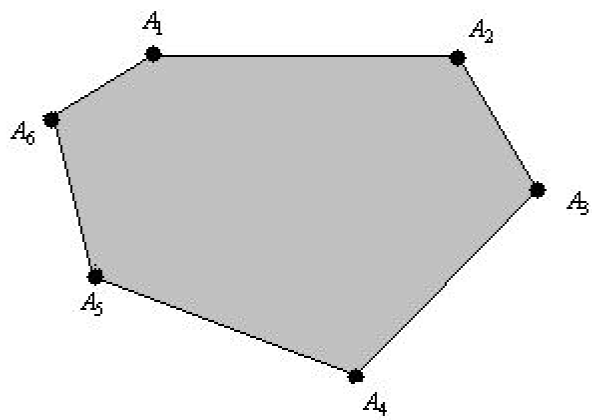


- **opuestos por el vértice**, si los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.



Definición 16

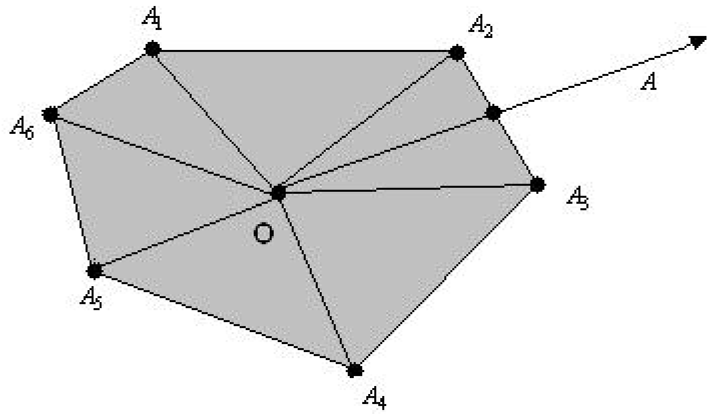
Sean los n puntos del plano $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$, ordenados de tal manera que cada una de las rectas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{A_2A_3}, ..., \overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$ y $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ dejen en un mismo semiplano abierto los $n-2$ puntos restantes. Se llama **polígono convexo**, o simplemente **polígono**, a la intersección de los semiplanos determinados por las rectas que unen pares de puntos consecutivos (donde se considera a A_1 consecutivo de A_n) y que contiene a los puntos restantes. Los segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$ y $\overline{A_nA_1}$ se llaman **lados del polígono** y los puntos del polígono que no pertenecen a los lados son sus **puntos interiores**.
Los puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ son los **vértices** y los ángulos $A_n\hat{A}_1A_2, A_1\hat{A}_2A_3, ..., A_{n-2}\hat{A}_{n-1}A_n, A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ son sus **ángulos interiores**.
Un **ángulo exterior** de un polígono es uno de los ángulos adyacentes a cada ángulo interior del polígono.
La poligonal cerrada $A_1A_2...A_n$ es la **frontera** o **contorno** del polígono y los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se denominan **diagonales** (por ejemplo: $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_5}$, etc.).



Teorema 6

Toda semirrecta con origen en un punto interior de un polígono convexo, corta al contorno del mismo en un punto.

Demostración:
Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un polígono convexo, O un punto interior al mismo y $\overrightarrow{OA}$ una semirrecta cualquiera.



Los vértices A_{i-1} y A_{i+1} (con $A_0 = A_n$ y $A_{n+1} = A_1$) están en semiplanos abiertos opuestos respecto de la recta $\overleftrightarrow{OA_i}, \forall i = 1, ..., n$. Luego, los ángulos $A_i\hat{O}A_{i+1}$, considerados sucesivamente para $i = 1, 2, ..., n$, sólo tienen en común los puntos de un lado con el anterior y los del otro con el siguiente, y su unión es todo el plano.

Resulta así que $\overrightarrow{OA}$ coincide con alguna de las semirrectas $\overleftrightarrow{OA_i}$ o es interior a uno de los ángulos $A_i\hat{O}A_{i+1}$ y por lo tanto corta al contorno en el vértice A_i o, por Teorema 5, en un punto del segmento $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Y ese es el único punto de intersección de $\overrightarrow{OA}$ con la frontera de $A_1, A_2, ..., A_n$, ya que si suponemos la existencia de otro punto, resultaría O y uno de los puntos de intersección en semiplanos opuestos respecto del lado que contiene al otro punto de intersección y esto contradice la definición de polígono.

FIN

PRÁCTICA 0.1: INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDEA. PLANIMETRÍA: CONCEPTOS PRIMITIVOS, DEFINICIONES, AXIOMAS. FIGURAS PLANAS ELEMENTALES.

1. Dibujar un punto P y cinco rectas distintas tales que P pertenezca a cada una de ellas. ¿A cuántas rectas puede pertenecer un punto dado?

2. Graficar cuatro puntos distintos A, B, C y D, tales que B, C y D sean colineales, y A, B, C y D sean no colineales.

3. (a) Graficar tres puntos no alineados A, B y C. ¿Cuántas rectas determinan?
   (b) Graficar cuatro puntos distintos A, B, C y D, tales que no haya tres de ellos alineados. ¿Cuántas rectas determinan?

4. ¿Verdadero o falso? Justificar:
   (a) Dos puntos son siempre colineales.
   (b) N puntos pueden ser colineales.
   (c) Tres puntos pueden ser NO colineales.

5. ¿Verdadero o falso? Justificar:

$$\{A, B, C\} \subset r \wedge \{B, C\} \subset s \Rightarrow r = s$$

6. (a) Graficar cuatro puntos distintos A, B, C y D de modo que el punto C esté entre los puntos A y D, y el punto D esté entre B y C.
   (b) Colorear con distintos colores las semirrectas $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CD}$.
   (c) Completar:
      i. $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{CD}=$
      ii. $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{AD}=$
      iii. $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$ son...

7. Expresar el segmento $\overline{AB}$ como intersección de dos semirrectas.

8. (a) Dados 5 puntos distintos A, B, C, D y E. ¿Cuántos segmentos tienen a esos puntos por extremos? Graficarlos y nombrarlos.
   (b) Nombra dos pares de segmentos consecutivos.
   (c) Nombra tres segmentos que sean consecutivos dos a dos.
   (d) Nombra, si existen, un par de segmentos consecutivos y colineales.
   (e) Nombra, si existen, un par de segmentos consecutivos no colineales.

9. Realizar un gráfico y nombrar:
   (a) Dos semiplanos distintos que tengan la misma frontera r.
   (b) Dos semiplanos que tengan fronteras distintas r y s y que su intersección sea vacía.
   (c) Dos semiplanos distintos que tengan fronteras distintas r y s, cuya intersección sea un semiplano.
   (d) Dos semiplanos que tengan fronteras distintas s y r y cuya intersección sea no vacía y no sea un semiplano.

10. Dibujar 5 conjuntos convexos y 5 no convexos.

11. Dibujar un ángulo $A\hat{O}B$. Dibujar y nombrar:
    (a) un ángulo adyacente
    (b) un ángulo opuesto por el vértice
    (c) un ángulo llano que contenga a B

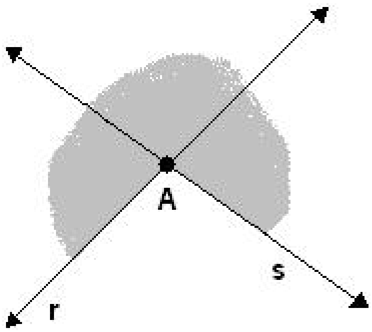
(d) un ángulo nulo

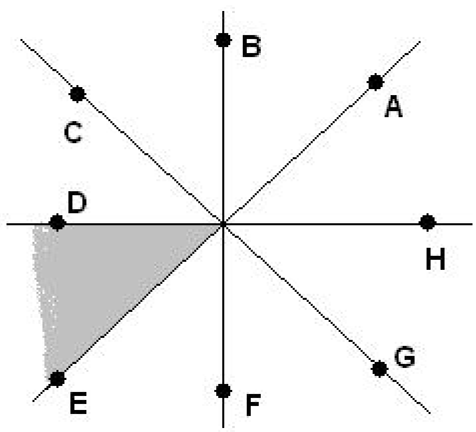
(e) una semirrecta interior a $A\hat{O}B$

(f) un ángulo cóncavo

(g) un ángulo pleno

12. Definir a través de operaciones entre conjuntos las figuras sombreadas. Indicar en cada caso si es convexa.

(a) 

(b) 

13. (a) Construir un polígono $ABCD$ y nombrar sus lados, ángulos, vértices y diagonales. Marcar los cuatro ángulos exteriores.

    (b) ¿Cuántos ángulos llanos se pueden obtener con la unión de todos los ángulos interiores y exteriores de ese polígono?

14. Considerar tres puntos no alineados A, B y C y definir a partir de ellos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Enunciar simbólicamente la definición.