

ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados.

George Pólya

George Pólya nació en Hungría en 1887. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Budapest y en su disertación para obtener el grado abordó temas de probabilidad. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federal en Zurich, Suiza. En 1940 llegó a la Universidad de Brown en E.U.A. y pasó a la Universidad de Stanford en 1942.

En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la resolución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Mirar hacia atrás.

Los aportes de Pólya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la resolución de problemas. Su famoso libro *Cómo plantear y resolver problemas* que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la resolución de problemas.

Otros trabajos importantes de Pólya son: *Descubrimiento matemático (I y II)*, y *Matemáticas y razonamiento Plausible (I y II)*.

Pólya, que murió en 1985 a la edad de 97 años, enriqueció a la matemática con un importante legado en la enseñanza de estrategias para resolver problemas. En suma, dejó los siguientes Diez mandamientos para los profesores de matemática:

1. Interésese en su materia.
2. Conozca su materia.
3. Trate de leer las caras de sus estudiantes; trate de ver sus expectativas y dificultades; póngase usted mismo en el lugar de ellos.
4. Dése cuenta que la mejor manera de aprender algo es descubriéndolo por uno mismo.
5. Dé a sus estudiantes no sólo información, sino el conocimiento de cómo hacerlo, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.
6. Permítales aprender a conjeturar.
7. Permítales aprender a comprobar.

8. Advierta que los rasgos del problema que tiene a la mano pueden ser útiles en la solución de problemas futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente situación concreta.
9. No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.
10. Sugíerales; no haga que se lo traguen a la fuerza.

El método de cuatro pasos de Pólya

Este método está enfocado en la resolución de problemas matemáticos, por ello nos parece importante señalar alguna distinción entre *ejercicio* y *problema*.

Para resolver un *ejercicio*, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un *problema*, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta.

Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio.

Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución: para un niño pequeño puede ser un problema encontrar *cuánto es $3 + 2$* o para niños de los primeros grados de la escuela primaria responder a la pregunta *¿cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad?* le puede plantear un problema, mientras que para uno de nosotros esta pregunta sólo sugiere un ejercicio rutinario: *dividir*.

Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas: nos ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos -entre otras cosas-, los cuales podremos aplicar cuando nos enfrentemos a la tarea de resolver problemas.

Como apuntamos anteriormente, la mayor contribución de Pólya en la enseñanza de las matemáticas es su *Método de cuatro casos para resolver problemas*. A continuación presentamos un breve resumen de cada uno de ellos y sugerimos la lectura del libro *Cómo plantear y resolver problemas* de este autor (editado por Trillas).

Paso 1: Entender el problema.

1. ¿Entiendes todo lo que dice?
2. ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
3. ¿Distingues cuáles son los datos?
4. ¿Sabes a qué quieres llegar?
5. ¿Hay suficiente información?
6. ¿Hay información extraña?
7. ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

Paso 2: Configurar un plan.

¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una *estrategia* se define como un artificio ingenioso que conduce a un objetivo final).

1. Ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura).
2. Usar una variable.
3. Buscar un patrón.
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.
7. Hacer un diagrama.
8. Usar razonamiento directo.
9. Usar razonamiento indirecto.
10. Usar las propiedades de los números.
11. Resolver un problema equivalente.
12. Trabajar hacia atrás.
13. Usar casos.
14. Resolver una ecuación.
15. Buscar una fórmula.
16. Usar un modelo.
17. Usar análisis dimensional.
18. Identificar sub-metas.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.

Paso 3: Ejecutar el plan.

1. Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.
2. Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (*¡puede que se te prenda el foco cuando menos te lo esperes!*).
3. No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4: Mirar hacia atrás.

1. ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?
2. ¿Adviertes una solución más sencilla?
3. ¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?

Comúnmente los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada las palabras a una forma equivalente del problema en la que usa símbolos matemáticos, resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta.

Algunas sugerencias hechas por quienes han tenido éxito al resolver problemas:

Además del Método de cuatro pasos de Pólya nos parece oportuno presentar en este apartado una lista de sugerencias hechas por estudiantes exitosos en la resolución de problemas:

1. Acepta el reto de resolver el problema.
2. Rescribe el problema en tus propias palabras.
3. Tómate tiempo para explorar, reflexionar, pensar...
4. Habla contigo mismo. Hazte cuantas preguntas creas necesarias.
5. Si es apropiado, trata el problema con números simples.
6. Muchos problemas requieren de un período de incubación. Si te sientes frustrado, no dudes en tomarte un descanso -el subconsciente se hará cargo-. Después inténtalo de nuevo.
7. Analiza el problema desde varios ángulos.
8. Revise tu lista de estrategias para ver si una (o más) te pueden ayudar a empezar.
9. Muchos problemas se pueden de resolver de distintas formas: sólo se necesita encontrar una para tener éxito.
10. No tenga miedo de hacer cambios en las estrategias.
11. La experiencia en la solución de problemas es valiosísima. Trabaje con montones de ellos, su confianza crecerá.
12. Si no estás progresando mucho, no vaciles en volver al principio y asegurarte de que realmente entendiste el problema. A veces necesario hacerlo dos o tres veces ya que la comprensión del problema aumenta a medida que se avanza en el trabajo de resolución.
13. Siempre mira hacia atrás: Trata de establecer con precisión cuál fue el paso clave en tu solución.
14. Ten cuidado en dejar tu solución escrita con suficiente claridad de tal modo puedas entenderla si la lees 10 años después.
15. Ayudar a que otros desarrollen habilidades en la solución de problemas es una gran ayuda para uno mismo: no les des soluciones; en su lugar provéelos con sugerencias significativas.
16. ¡Disfrútalo! Resolver un problema es una experiencia significativa.

Ejemplos

1) Hacer una o más operaciones matemáticas.

Justo en la zona de Punta Escambrón ocurrió uno de los peores accidentes de derrame de combustible en la historia del país. Se cree que al menos 2 de los 9 tanques de la barcaza Morris J. Berman se rompieron en el impacto comenzando a derramar parte de los 1.5 millones de galones de combustible utilizados para generar energía eléctrica. Los 1.5 millones de galones de petróleo caben en 125 camiones tanques de los que a diario se ven a diario en la carretera. ¿Cuántos galones de combustible caben en cada camión tanque?

Resolución:

Comprender el problema:

La cantidad de petróleo en la barcaza es 1.5 millones. Esta cantidad cabe en 125 camiones tanques. ¿Cuál es la capacidad de cada tanque?

Desarrollar un plan:

Dividir 1.5 millones entre 125 camiones.

Llevar a cabo el plan:

$$1500000 : 125 = 12000 \text{ galones}$$

Revisar:

$$12000 \cdot 125 = 1500000 \text{ millones}$$

Solución: En cada tanque caben aproximadamente 12000 galones de combustible.

2) Avanzar de atrás hacia adelante.

En la aprobación de un proyecto de ley presentado ante una comisión de la Cámara de Representantes de Puerto Rico, hubo 7 votos a favor de representantes del Partido Nuevo Progresista más que del Partido Popular y el número de votos a favor del Partido Popular fue el doble de los votos a favor de los representantes del Partido Independentista. Hubo 2 representantes del partido Independentista que votaron a favor de la aprobación del proyecto. ¿Con cuántos votos a favor se aprobó el proyecto?

Resolución:

Comprender el problema:

Se desea saber el número de votos a favor de la aprobación. Se conoce que del Partido Nuevo Progresista hubo 7 votos más que el del Partido Popular. Además, que el número de votos del partido Popular fue el doble de los votos del Partido Independentista y que hubo 2 votos del Partido Independentista.

Desarrollar un plan:

Se aplicará la estrategia de trabajar de adelante hacia atrás. Primero, se utilizará el hecho que hubo 2 votos del Partido Independentista para determinar el número de votos del Partido Popular. Luego, se determinará el número de votos del Partido Nuevo Progresista. Por último, se sumará las tres cantidades.

Llevar a cabo el plan:

Como hubo 2 votos del Partido Independentista, hubo el doble o 4 votos del Partido Popular. Como del Partido Nuevo Progresista hubo 7 más que del Partido Popular, en este partido hubo 11 votos. Por tanto, en total hubo: $2 + 4 + 11 = 17$ votos.

Revisar:

La cantidad obtenida parece razonable.

Solución: Hubo 17 votos a favor del proyecto.

3) Organizar la información en una tabla.

Con el propósito de obtener fondos para la actividad de la Alerta Mundial contra el SIDA, doña Carmen espera vender 27 cajas de estampas conmemorativas de la actividad. Tiene cajas que contienen estampas doradas y cajas con estampas plateadas. Cada caja de estampas doradas contiene ocho

estampas. Las cajas con estampas plateadas contienen nueve estampas. Si se adquirieron cajas con un total de 230 estampas, ¿cuántas cajas de cada tipo se tienen?

Resolución:

Comprender el problema:

Hay 27 cajas con 230 estampas en total. Las cajas con estampas doradas tienen 8 estampas. Las cajas con estampas plateadas tienen 9 estampas. ¿Cuántas cajas hay de cada tipo?

Desarrollar un plan:

Organizar la información en una tabla compuesta de seis columnas en la cual se enumere, para cada combinación posible con 27 cajas, las cantidades de cajas y estampas de cada clase, así como sus subtotales. Se busca aquella combinación que de un total de 230 estampas.

Llevar a cabo el plan:

Estampas doradas		Estampas plateadas		Total	
Cajas	Estampas	Cajas	Estampas	Cajas	Estampas
1	8	26	234	27	242
2	16	25	225	27	241
3	24	24	216	27	240
...
13	104	14	126	27	230

Revisar:

Para revisar la solución obtenida, solo falta corroborar que 13 cajas de estampas doradas contienen 104 estampas y 14 cajas de estampas plateadas contienen 126 estampas, para un total de 230 estampas. Por consiguiente, la solución obtenida está correcta.

Solución: Carmen debe tener 13 cajas de estampas doradas y 14 cajas de estampas plateadas.

4) Buscar un patrón.

Un inversionista observa que, en un período de 4 meses, el valor promedio de las acciones de una compañía aumenta de la manera siguiente: 34.5, 37, 39.5 y 42. De continuar así, ¿a cuánto podría ascender en el octavo mes?

Resolución:

Comprender el problema:

Se desea saber el valor de las acciones en el octavo mes dado que los valores promedios en los primeros cuatro meses fueron: 4.5, 37, 39.5 y 42.

Desarrollar un plan:

Se aplicará la estrategia de buscar un patrón. Primero, se determinará la diferencia entre los valores consecutivos. De ser una cantidad constante, se utilizará la misma para calcular el valor promedio del quinto, sexto, séptimo y octavo mes.

Llevar a cabo el plan:

La diferencia entre cada valor consecutivo durante los primeros cuatro meses fue el valor constante 2.5. Por tanto, el valor promedio del quinto, sexto, séptimo y octavo mes será: 44.5, 47, 49.5 y 52, respectivamente.

Revisar:

La diferencia entre cada valor consecutivo durante los primeros cuatro meses fue de 2.5. Por tanto, es razonable esperar que de continuar así (este patrón) el valor promedio del quinto, sexto, séptimo y octavo mes serán: 44.5, 47, 49.5 y 52, respectivamente.

Solución: El valor esperado de la acción en el octavo podría ascender a 52.

5) Hacer uso de una fórmula.

Mildred y Monserrate planean hacer su primer viaje a Grecia este verano. Averiguan que la temperatura promedio más baja en Grecia, durante el mes de Julio, es de 20 °C (grados centígrados o Celsius), mientras que la temperatura más alta es de 35 °C. Confundida Mildred le pregunta a Monserrat si debe llevar un abrigo de invierno. Monserrat le señala que las temperaturas en Grecia se miden en grados Celsius y en Puerto Rico en grados Fahrenheit (°F). ¿Deberá Mildred llevar un abrigo?

Resolución:

Comprender el problema:

Se desea saber si Mildred debe llevar un abrigo. Se presumirá que si las temperaturas son menores que 60 °F, un abrigo de invierno será necesario. Se necesita saber cuales son las temperaturas en °F equivalente a las temperaturas 20 y 35 °C.

Desarrollar un plan:

Se aplicará la estrategia de hacer uso de una fórmula. La fórmula para convertir °C a °F es: $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ (donde F representa °F y C representa °C). Se calculará los °F equivalente a 20 y 35 °C, sustituyendo estos valores en la fórmula.

Llevar a cabo el plan:

$$F = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68$$

$$F = \frac{9}{5} \cdot 35 + 32 = 95$$

Revisar:

Se evalúan las fórmulas utilizando la calculadora un para de veces y los resultados coinciden. Por tanto, deben estar correctos.

Solución: Mildred no debe llevar un abrigo de invierno.

¡Recuerda!

El modelo de Pólya nos presenta cuatro pasos para resolver problemas. Estos son:

1. Comprender el problema.
2. Desarrollar un plan.
3. Llevar a cabo el plan.
4. Revisar.

Este modelo debe ser acompañado con una o varias estrategias. Una estrategia muy útil es hacer referencia a problemas que se hayan resuelto anteriormente.

¡Tu capacidad para resolver problemas se desarrollará cada vez que resuelvas uno!



Lo que se puede enseñar es la actitud correcta ante los problemas, y enseñar a resolver problemas es el camino para resolverlos (...). El mejor método no es contarles cosas a los alumnos, sino preguntárselas y, mejor todavía, instarles a que se pregunten ellos mismos.

P. Halmos